

基于西原模型的非等压圆形硐室黏塑性区理论分析

郭建强¹, 袁超^{1*}, 林彬², 徐越洋¹, 吴俊杰¹, 杜荣杰¹

(1. 湖南科技大学 资源环境与安全工程学院, 湖南 湘潭 411201; 2. 中铁五局集团第二工程有限责任公司, 湖南 衡阳 421200)

摘要:以 Mohr-Coulomb 强度准则和西原流变模型为基础, 推导出非等压原岩应力情况下的圆形硐室黏塑性区边界方程. 分析不同侧压力系数与支护阻力条件下, 硐室黏塑性区半径随时间的变化规律, 探讨硐室围岩卸荷初期和围岩流变期间的塑性区差异性. 研究发现: 硐室围岩卸荷初期, 黏塑性区半径增长率较高, 且其增长率随时间的增加而逐渐减小; 当时间增加到一定程度后, 黏塑性区半径不再增大而是稳定在某一固定值; 黏塑性区半径随侧压力系数增大而增大, 同一时刻下, 侧压力系数越大, 黏塑性区半径增长率越小; 支护阻力对硐室围岩卸荷初期和围岩流变期间的黏塑性区半径有抑制作用, 且抑制作用随支护阻力的增大而逐渐增强.

关键词: 西原模型; 黏塑性区; 边界方程; 侧压力系数; 支护阻力

中图分类号: TD354

文献标志码: A

文章编号: 1672-9102(2023)01-0023-06

Theoretical Analysis of Viscoplastic Zone of Non-axisymmetric Circular Chamber Based on Nishihara Model

GUO Jianqiang¹, YUAN Chao¹, LIN Bin², XU Yueyang¹, WU Junjie¹, DU Rongjie¹

(1. School of Resources, Environment and Safety Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China;

2. The Second Engineering Co., Ltd. of China Railway, The Fifth Bureau Group, Hengyang 421200, China)

Abstract: Based on the Mohr-Coulomb strength criterion and Nishihara rheological model, the boundary equation of the viscoplastic zone of circular chamber under stress of non-isobaric rock is derived. The variation of the viscoplastic zone radius of the chamber viscoplastic zone with time under the conditions of pressure coefficient and supporting resistance on different sides is analyzed, and the difference between the plastic zone in the early stage of unloading and the rheological period of the surrounding rock is discussed. It is found that the growth rate of the radius of the viscoplastic zone is high in the early stage of unloading of the surrounding rock, and the growth rate gradually decreases with the increase of time. After the time increases to a certain extent, the radius of the viscoplastic zone no longer increases, but stabilizes at a fixed value. The radius of the viscoplastic zone increases with the increase of the pressure coefficient on the side. At the same time, the larger the lateral pressure coefficient, the smaller the growth rate of the radius of the viscoplastic zone. The supporting resistance has an inhibitory effect on the viscoplastic zone radius of the surrounding rock in the early stage of unloading and the rheological period of the surrounding rock, and the inhibitory effect gradually increases with the increase of supporting resistance.

Keywords: Nishihara model; viscoelasto-viscoplastic; boundary equation; lateral pressure coefficient; support resistance

收稿日期: 2022-07-22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52274080); 湖南省自然科学基金青年基金资助项目(2021JJ40211); 湖南省教育厅优秀青年基金资助项目(21B0486)

* 通信作者, E-mail: yuanchaozh1@126.com

洞室开挖后,由于岩石具有流变效应,时间对洞室围岩的变化有着重要影响.传统的弹塑性力学模型忽略了时间对岩体的影响,为了更加深入研究洞室围岩应力和应变的分布规律,目前已建立多种描述岩土流变特性的岩土流变本构模型,根据基本元件及组合方式的差异,有黏弹性模型^[1]、黏弹-塑性模型^[2]、黏弹-黏塑性模型^[3]等.郑颖人等^[4]基于 Mohr-Coulomb(简称 M-C)屈服准则,得到了圆形隧道黏弹-塑性解;夏才初等^[5]基于西原模型,采用拉普拉斯变换和逆变换方法,推导了圆形隧道变边界问题的黏弹-黏塑性解析解;曹朔等^[6]基于西原模型,假设围岩满足 Drucker-Prager 屈服准则,并考虑剪胀效应,求解了圆形隧道黏弹-黏塑性解;曹瑞琅等^[3]将 Hoek-Brown(简称 H-B)屈服准则引入到西原流变本构模型,推导了支护条件下基于 H-B 准则西原模型的圆形隧洞黏弹塑性解;蔡燕燕等^[7]基于 H-B 准则和河海模型,在不考虑洞周面力的情况下得到了围岩的应力及位移解析解;王卫军等^[8-9]基于 M-C 强度准则,将 Kirsch 解与支护力代入塑性条件中,研究了非等压应力条件下圆形巷道围岩塑性区近似边界方程,分析了塑性区影响范围的围岩力学机制;王志强等^[10]通过复变函数中保角变换的方法,推导出圆形巷道在双向不等压应力场中周边围岩的切向应力方程,再结合 M-C 强度准则,进一步得到圆形巷道在双向不等压条件下的塑性区计算公式;张纯旺等^[11]通过弹性力学中解圆孔应力方程的方法,利用莫尔-库仑强度准则,推导出在双向不等压应力场载荷作用下圆形巷道围岩塑性区的边界方程;张承客等^[12]采用复变函数理论和滑移线场理论,得出弹性区和塑性区应力组合表达式,根据弹塑性边界上应力相等得到塑性区边界方程.

综上所述发现,目前关于洞室围岩弹塑性理论解的研究大多集中于假定洞室处于静水应力场下,这一假定与工程中多数地下洞室的应力环境严重不符,同时也忽视了岩体流变特性对洞室围岩塑性区的影响.为此,本文在前人研究的基础上,假定洞室围岩本构关系符合西原模型,选用 M-C 准则推导非等压地应力条件下圆形洞室黏塑性区边界方程,分析不同侧压力系数与支护阻力下塑性区半径随时间变化的规律,探讨洞室围岩卸荷初期和围岩流变期间的塑性区差异性,以期对洞室围岩支护设计有一定的理论参考价值.

1 洞室力学模型

1.1 基本假设

为了利用 M-C 准则推导塑性区边界方程,建立如图 1 所示的洞室力学模型.计算时做如下假设:(1)洞室处于非等压地应力场下,垂直地应力为 P_0 ,水平地应力为 λP_0 , λ 为侧压力系数;(2)洞室为圆形洞室,洞室半径为 R_0 ;(3)洞室围岩为均质、各向同性的黏弹-黏塑性体,黏塑性区半径为 R_p ,符合西原模型;(4)支护阻力为 p_i ,并假设 p_i 为常数;(5)黏弹性区和黏塑性区不发生体积应变,不考虑围岩屈服后由于裂隙发展、扩张造成的剪胀效应.

1.2 基本方程

极坐标下的平衡方程为

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (1)$$

式中: σ_r 为围岩径向应力; σ_θ 为围岩切向应力; r 为极坐标下分析点与原点的距离.

极坐标形式的几何方程为

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr}, \varepsilon_\theta = \frac{u}{r}. \quad (2)$$

式中: ε_r 为围岩径向应变; ε_θ 为围岩切向应变; u 为径向位移.

假设围岩符合西原模型,该模型由广义开尔文体与黏塑性体串联组成,如图 2 所示.其中, G_1 为弹性体剪切模量; G_2 为黏弹性体剪切模量; η_1 为黏塑性体黏滞系数; η_2 为黏弹性体黏滞系数; σ_s 为黏塑性体屈

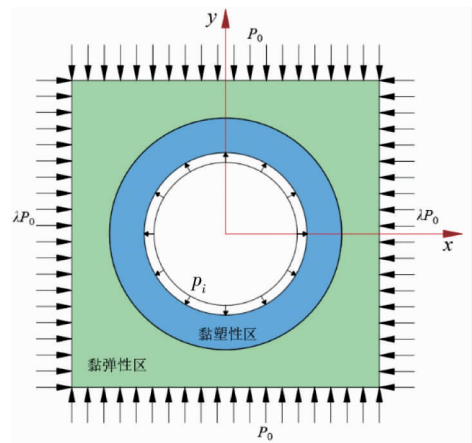


图 1 洞室力学模型

服应力; σ 为施加在西原模型上的应力.

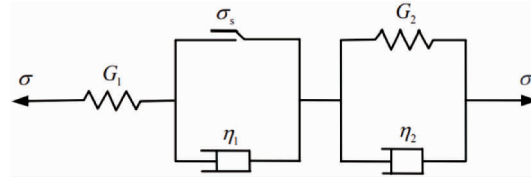


图2 西原模型

广义开尔文模型本构方程为

$$2\eta_2 \ddot{\mathbf{e}}_{ij} + 2G_2 \dot{\mathbf{e}}_{ij} = \frac{\eta_2}{G_1} \ddot{\mathbf{S}}_{ij} + \left(1 + \frac{G_2}{G_1}\right) \dot{\mathbf{S}}_{ij}. \quad (3)$$

式中: \mathbf{e}_{ij} 为偏应变张量; \mathbf{S}_{ij} 为偏应力张量.

黏塑性区围岩应力重分布除了受原岩应力影响外,还具有时间效应.以围岩流变时间 t 趋于无穷时定义为稳态时刻,黏塑性体偏应变与偏应力符合关系^[13]:

$$\dot{\mathbf{e}}_{ij} = \frac{\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}^\infty}{2\eta_1}. \quad (4)$$

式中: \mathbf{S}_{ij}^∞ 为稳态偏应力张量.

西原模型本构方程为^[5]

$$2\eta_2 \ddot{\mathbf{e}}_{ij} + 2G_2 \dot{\mathbf{e}}_{ij} = \frac{\eta_2}{G_1} \ddot{\mathbf{S}}_{ij} + \left(1 + \frac{G_2}{G_1} + \frac{\eta_2}{\eta_1}\right) \dot{\mathbf{S}}_{ij} + \frac{G_2}{\eta_1} (\mathbf{S}_{ij} - \mathbf{S}_{ij}^\infty). \quad (5)$$

2 硐室围岩塑性区边界方程

2.1 围岩黏弹性区应力解

黏弹性区的边界条件为

$$\begin{cases} r = R_p(t), \sigma_r = \sigma_r^{R_p}; \\ r \rightarrow +\infty, \sigma_r = P_0. \end{cases} \quad (6)$$

式中: $\sigma_r^{R_p}$ 为黏弹性区内边界面上的径向应力.

弹性区应力表达式为

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{P_0}{2}(1+\lambda)\left(1 - \frac{R_p^2}{r^2}\right) - \frac{P_0}{2}(1-\lambda)\left[1 - \frac{4R_p^2}{r^2} + 3\left(\frac{R_p^2}{r^2}\right)^2\right]\cos 2\theta + \sigma_r^{R_p} \frac{R_p^2}{r^2}; \\ \sigma_\theta = \frac{P_0}{2}(1+\lambda)\left(1 + \frac{R_p^2}{r^2}\right) + \frac{P_0}{2}(1-\lambda)\left[1 + 3\left(\frac{R_p^2}{r^2}\right)^2\right]\cos 2\theta - \sigma_r^{R_p} \frac{R_p^2}{r^2}. \end{cases} \quad (7)$$

假定强度准则符合 M-C 强度准则,令 $a = c \cot \varphi$, 则:

$$\frac{\sigma_\theta + a}{\sigma_r + a} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} = K. \quad (8)$$

式中: c 为内聚力; φ 为内摩擦角.

根据式(7)和式(8),可求得黏弹性区内边界处的应力:

$$\begin{cases} \sigma_r^{R_p} = \frac{1}{K+1} [(1+\lambda)P_0 + 2(1-\lambda)P_0 \cos 2\theta + (1-K)a]; \\ \sigma_\theta^{R_p} = \frac{K}{K+1} [(1+\lambda)P_0 + 2(1-\lambda)P_0 \cos 2\theta + (1-K)a] + (K-1)a. \end{cases} \quad (9)$$

式中: $\sigma_\theta^{R_p}$ 为黏弹性区内边界面上的切向应力.

2.2 围岩黏塑性区应力与黏塑性区边界方程

2.2.1 稳态应力场解

稳态应力场是在流变时间 t 趋于无穷时的围岩应力场.根据平衡方程式(1)和强度准则式(8)及硐室

岩壁上的应力边界条件 $\sigma_r^{R_p} = p_i$, 可得稳态时黏塑性区应力为

$$\begin{cases} \sigma_r^\infty = (p_i + a) \left(\frac{r}{R_0}\right)^{K-1} - a; \\ \sigma_\theta^\infty = (p_i + a) K \left(\frac{r}{R_0}\right)^{K-1} - a. \end{cases} \quad (10)$$

式中: $\sigma_r^\infty, \sigma_\theta^\infty$ 分别为稳态时的黏塑性区径向应力和切向应力.

令 $r = R_p$, 可得稳态时黏塑性区径向应力 σ_r^∞ 为

$$\sigma_r^\infty = (p_i + a) \left(\frac{R_p}{R_0}\right)^{K-1} - a. \quad (11)$$

根据应力连续条件, 联立式(9)第一式和式(11), 得

$$R_p^\infty = R_0 \left[\frac{(1 + \lambda)P_0 + 2(1 - \lambda)P_0 \cos 2\theta + (1 - K)a}{(p_i + a)(K + 1)} + \frac{a}{p_i + a} \right]^{\frac{1}{K-1}}. \quad (12)$$

式中: R_p^∞ 为稳态时的黏塑性区半径.

2.2.2 瞬态应力场解

由文献[5]可知, 黏塑性区应力表达式为

$$\begin{cases} \sigma_r^{R_p} = Q(t) \frac{1}{K-1} \left(R_p^{K-1} - \frac{R_0^{K+1}}{R_p^2} \right) + \frac{R_0^2 p_i}{R_p^2} + \left(1 - \frac{R_0^2}{R_p^2} \right) L^{-1}[N(s)]; \\ \sigma_\theta^{R_p} = Q(t) \frac{1}{K-1} \left(KR_p^{K-1} + \frac{R_0^{K+1}}{R_p^2} \right) - \frac{R_0^2 p_i}{R_p^2} + \left(1 + \frac{R_0^2}{R_p^2} \right) L^{-1}[N(s)]. \end{cases} \quad (13)$$

式中: $L^{-1}[\cdot]$ 为对 $[\cdot]$ 的拉普拉斯逆变换; $N(s)$ 为待求函数.

其中,

$$Q(t) = B_1 \left\{ \frac{1}{A_3} - \frac{1}{2A_3 \sqrt{A_2^2 - 4A_1 A_3}} \left[A_2 \left(e^{-\frac{A_2 + \sqrt{A_2^2 - 4A_1 A_3}}{2A_1} t} + e^{-\frac{A_2 - \sqrt{A_2^2 - 4A_1 A_3}}{2A_1} t} \right) + \sqrt{A_2^2 - 4A_1 A_3} \left(e^{-\frac{A_2 + \sqrt{A_2^2 - 4A_1 A_3}}{2A_1} t} + e^{-\frac{A_2 - \sqrt{A_2^2 - 4A_1 A_3}}{2A_1} t} \right) \right] \right\}. \quad (14)$$

式中: A_1, A_2, A_3 和 B_1 均为常数, 其值为

$$\begin{cases} A_1 = \frac{\eta_2}{2G_1}, A_2 = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{G_2}{G_1} + \frac{\eta_2}{\eta_1} \right), A_3 = \frac{G_2}{2\eta_1}; \\ B_1 = \frac{G_2}{2\eta_1} (p_i + a) (K - 1) \left(\frac{1}{R_0} \right)^{K-1}. \end{cases} \quad (15)$$

根据 $r = R_p$ 应力连续, 联立式(9)第一式和式(13)第一式, 可求出 $L^{-1}[N(s)]$ 表达式:

$$L^{-1}[N(s)] = \frac{1}{R_0^2} \left\{ \frac{1}{K+1} [(1 + \lambda)P_0 + 2(1 - \lambda)P_0 \cos 2\theta + (1 - K)a] - \frac{1}{1 - \frac{R_0^2}{R_p^2}} Q(t) \frac{1}{K-1} \left(R_p^{K-1} - \frac{R_0^{K+1}}{R_p^2} \right) - \frac{R_0^2 p_i}{R_p^2} \right\}. \quad (16)$$

界面处应力式(9)还需满足切向应力连续条件, 因此联立式(9)、式(13)和式(16), 推导得黏塑性区边界方程为

$$\frac{K[(1 + \lambda)P_0 + 2(1 - \lambda)P_0 \cos 2\theta + (1 - K)a]}{K + 1} + (K - 1)a - \frac{Q(t)}{K - 1} \left(KR_p^{K-1} + \frac{R_0^{K+1}}{R_p^2} \right) + \frac{R_0^2 p_i}{R_p^2} - \frac{R_p^2 + R_0^2}{R_p^2 - R_0^2} \left[\frac{(1 + \lambda)P_0 + 2(1 - \lambda)P_0 \cos 2\theta + (1 - K)a}{K + 1} - \frac{Q(t)}{K - 1} \left(R_p^{K-1} - \frac{R_0^{K+1}}{R_p^2} \right) - \frac{R_0^2 p_i}{R_p^2} \right] = 0. \quad (17)$$

3 黏塑性区半径影响因素分析

根据式(17),黏塑性区的形态和半径除与侧压力系数、支护阻力和时间有关以外,还受原岩应力、洞室半径、黏聚力、内摩擦角、弹性体剪切模量等参数的影响.设定原岩应力 $P_0 = 19 \text{ MPa}$;隧道半径 $R_0 = 3.0 \text{ m}$;内聚力 $c = 2.0 \text{ MPa}$;内摩擦角 $\varphi = 23^\circ$;弹性体剪切模量 $G_1 = 242 \text{ MPa}$;黏弹性体剪切模量 $G_2 = 782 \text{ MPa}$;黏弹性体黏滞系数 $\eta_2 = 437.6 \text{ MPa} \cdot \text{d}$;黏塑性体黏滞系数 $\eta_1 = 602.2 \text{ MPa} \cdot \text{d}$;侧压力系数 $\lambda = 1$;支护力 $p_i = 0 \text{ MPa}$.

借助 MATLAB 软件绘制黏塑性区半径与流变时间的关系曲线,如图 3 所示. $t=0$ 时刻的黏塑性区半径为洞室开挖完成瞬态下开挖作用形成的瞬时塑性区半径,此时刻为围岩应力作用和围岩流变反应初始时刻.由图 3 可知,围岩流变时间对黏塑性区半径的影响主要分为两个阶段,第一阶段为洞室围岩卸荷初期,随着时间的增加,黏塑性区半径不断增大,但半径增长率逐渐减小.如时间从 5 d 至 10 d 时,黏塑性区半径从 4.565 m 增大到 4.728 m,增加了 0.163 m,增长率为 3.57%;时间从 10 d 至 15 d 时,黏塑性区半径从 4.728 m 增大到 4.782 m,仅增加了 0.013 m,增长率仅为 1.14%.随着时间的增加,洞室围岩卸荷程度逐渐减弱,黏塑性区半径趋于稳定,将此阶段定义为第二阶段.如时间从 25 d 至 30 d 时,黏塑性区半径从 4.798 m 增大到 4.800 m,仅增加 0.002 m,且往后半径稳定在 4.800 m 没有增加,说明此时围岩流变反应处于稳定状态.

3.1 侧压力系数对黏塑性区半径的影响

图 4 为侧压力系数 $\lambda = 1.0, 1.5, 2.0, 2.5$ 的情况下的黏塑性区半径与流变时间的关系曲线.

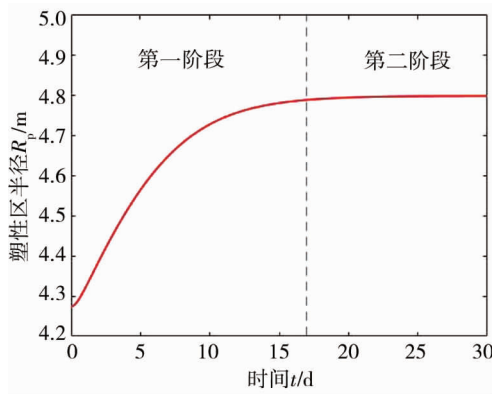


图 3 黏塑性区半径与流变时间的关系

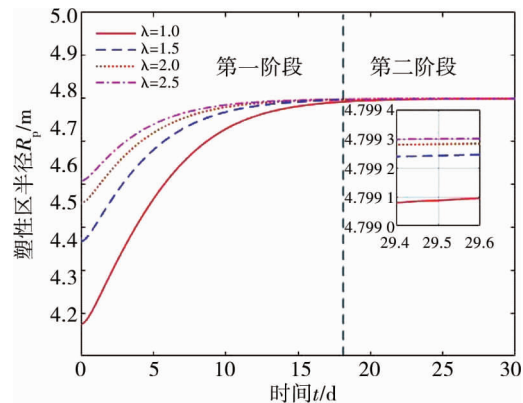


图 4 不同侧压力系数下的黏塑性区半径与流变时间的关系

由图 4 可以看出,侧压力系数越大,开挖完成瞬态时刻的黏塑性区半径也越大,这是由于在垂直应力 P_0 不变的条件下,侧压力系数增大会导致水平应力增大.随着侧压力系数增大,黏塑性区半径在第一阶段的增长率下降,而且黏塑性区半径趋于稳定的时刻基本一致.在同一时刻下,每增加一次侧压力系数,黏塑性区半径增长幅度减小.如 $t=0 \text{ d}$ 时,侧压力系数从 1.0 增加到 1.5 时,黏塑性区半径增加了 0.194 m;侧压力系数从 1.5 增加到 2.0 时,黏塑性区半径增加了 0.089 m.

3.2 支护阻力对黏塑性区半径的影响

图 5 为支护阻力 $p_i = 0, 1, 2, 3 \text{ MPa}$ 的黏塑性区半径与流变时间的关系曲线.需要说明的是,设定支护阻力只是对公式的算例分析,便于分析不同支护阻力下流变时间对塑性区半径的影响,实际工程中支护阻力较小,没有算例分析中显示的支护阻力对黏塑性区半径增长的抑制效果,但支护阻力对黏塑性区半径增长的抑制效果依然存在.

由图 5 可以看出,支护阻力对黏塑性区有控制作用,增大支护阻力能够抑制黏塑性区在开挖完成瞬态时刻的

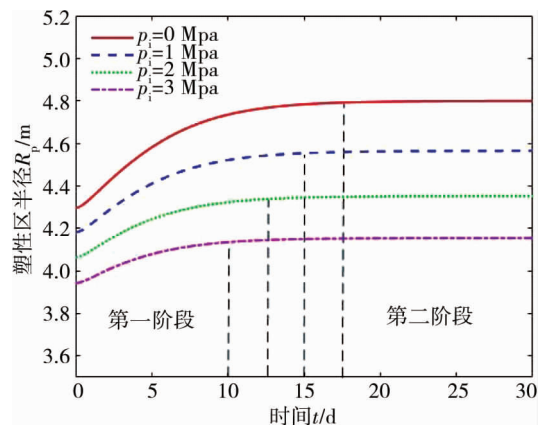


图 5 不同支护阻力下黏塑性区半径与流变时间的关系

范围.如 $t=0$ d 时,支护阻力 $p_i=0$ MPa 下的黏塑性区半径为 4.296 m,支护阻力 $p_i=3$ MPa 下的黏塑性区半径为 3.942 m,相比减少了 3.054 m.此外在黏塑性区扩展的第一阶段,黏塑性区半径随着支护阻力增大而减小,并且支护阻力越大,黏塑性区半径增长率越小,黏塑性区扩展幅度也越小.如 $t=5$ d 时,支护阻力由 0 MPa 增大至 1 MPa 时,黏塑性区半径由 4.581 m 减小到 4.410 m,减少了 0.171 m;同一时刻下支护阻力由 1 MPa 增大至 2 MPa 时,黏塑性区半径由 4.410 m 减小到 4.243 m,减少了 0.167 m.随着支护阻力的增大,黏塑性区半径减少幅度下降,说明支护阻力对黏塑性区的控制强度在下降.在第二阶段,增加等量的支护阻力,黏塑性区半径稳定时间提前.如支护阻力为 0 MPa 时黏塑性区半径在 $t=17$ d 时稳定;支护阻力为 1 MPa 时黏塑性区半径在 $t=15$ d 时稳定;支护阻力为 2 MPa 时黏塑性区半径在 $t=13$ d 时稳定;支护阻力为 3 MPa 时黏塑性区半径在 $t=10$ d 时稳定.支护阻力每增大 1 MPa,稳定时间随之提前 2 d 左右.

4 结论

- 1) 基于西原模型,结合 M-C 准则,导出了非等压条件下的圆形洞室塑性区近似边界解析解.
- 2) 流变对洞室围岩失稳有重要影响,在施加洞室支护时不仅需要支护塑性区范围外的弹性区,还需要预考虑围岩流变所造成的塑性区扩张,确保洞室支护长久有效.
- 3) 对于深埋洞室存在的高侧压力系数问题,需要注意开挖时的塑性区快速扩张现象,应当进行及时支护,避免可能引起的围岩破坏失稳导致事故发生.
- 4) 洞室围岩支护不仅能有效降低作用在洞室岩壁上的荷载,还能对洞室围岩流变造成的塑性区扩张起到抑制作用.

参考文献:

- [1] FAHIMIFAR A, TEHRANI F M, HEDAYAT A, et al. Analytical solution for the excavation of circular tunnels in a visco-elastic Burger's material under hydrostatic stress field[J]. Tunnelling and Underground Space Technology, 2010, 25(4): 297-304.
- [2] 唐胜兰,王海,俞缙,等.考虑围岩应变强化及扩容的深埋软岩隧洞时变位移解[J].隧道建设,2017,37(s1):72-78.
- [3] 曹瑞琅,段庆伟,赵宇飞,等.基于 Hoek-Brown 准则西原模型的圆形隧洞黏弹塑性解[J].水利水电技术,2017,48(4): 64-71.
- [4] 郑颖人,朱合华,方正昌,等.地下工程围岩稳定分析与设计理论[M].北京:人民交通出版社,2012.
- [5] 夏才初,刘宇鹏,吴福宝,等.基于西原模型的圆形隧道黏弹-黏塑性解析解[J].岩土力学,2019,40(5):1638-1648.
- [6] 曹朔,喻勇,汪波.基于 D-P 准则和西原模型的圆形隧道黏弹-黏塑性解[J].岩土力学,2021,42(7):1925-1932.
- [7] 蔡燕燕,张建智,俞缙,等.考虑围岩蠕变全过程与扩容的深埋隧洞非线性位移解[J].岩土力学,2015,36(7): 1831-1839.
- [8] 王卫军,董恩远,袁超.非等压圆形巷道围岩塑性区边界方程及应用[J].煤炭学报,2019,44(1):105-114.
- [9] 王卫军,韩森,董恩远.考虑支护作用的巷道围岩塑性区边界方程及应用[J].采矿与安全工程学报,2021,38(4): 749-755.
- [10] 王志强,武超,石磊,等.基于复变理论的双向不等压圆形巷道围岩应力及塑性区分析[J].煤炭学报,2019,44(s2): 419-429.
- [11] 张纯旺,宋选民,王伟,等.双向不等压圆形巷道围岩塑性区理论分析及数值模拟[J].煤矿安全,2017,48(11): 217-221.
- [12] 张承客,李宁,胡海霞.非静水压力下圆形隧洞围岩塑性区分析[J].西北农林科技大学学报(自然科学版),2015,43(4):215-222.
- [13] FRITZ P. An analytical solution for axisymmetric tunnel problems in elasto-viscoplastic media[J]. International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, 1984, 8(4):325-342.