

# 基于 Mogi-Coulomb 准则的圆形巷道围岩塑性区分析

欧阳蕊灿, 王卫军\*

(湖南科技大学 资源环境与安全工程学院, 湖南 湘潭 411201)

**摘要:** 基于 Mogi-Coulomb 强度准则推导了两向非等压下的圆形巷道塑性区隐式边界方程, 分析了岩石内聚力、内摩擦角、中间主应力对塑性区的影响。研究表明: 内聚力与内摩擦角均不改变塑性区的形态仅对塑性区的大小有影响, 随着内聚力的增大, 塑性区的半径逐渐减小, 且随着内聚力的增大, 塑性区半径减小的速度增加; 内摩擦角与塑性区半径变化趋势相反, 且塑性区半径减小的速度随内摩擦角的增大而减小; 当中间主应力系数小于一定值时, 随着中间主应力系数增大, 塑性区的半径减小, 当中间主应力系数超过一定值时, 随着中间主应力系数增大塑性区的半径却开始增大。因此在巷道围岩支护设计中适当考虑中间主应力的作用对巷道围岩的稳定具有重要意义。

**关键词:** 内聚力; 内摩擦角; 中间主应力; Mogi-Coulomb 准则; 塑性区

**中图分类号:** TD313      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1672-9102(2021)04-0001-06

## Analysis of Plastic Zone of Surrounding Rock of Circular Roadway Based on Mogi-Coulomb Criterion

OUYANG Ruican, WANG Weijun

(School of Resources, Environment and Safety Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China)

**Abstract:** Based on the Mogi-Coulomb strength criteria, an implicit boundary equation for the plastic region of a circular road under uneven pressure in two directions is derived, and the effects of rock agglomeration, internal friction angle, and intermediate principal stress on the plastic region is analyzed. Studies have shown that neither cohesive force nor internal friction angle, but the size of the plastic zone changes the shape of the plastic zone. As the cohesive force increases, the radius of the plastic zone gradually decreases, and as the cohesive force increases, the radial deceleration rate of the plastic zone increases. The tendency of the internal friction angle and the radius of the plastic region to change is opposite, and the decrease rate of the radius of the plastic region decreases as the internal friction angle increases. If the intermediate principal stress factor is less than a certain value, the intermediate principal stress factor is proportional to the size of the plastic zone. Negative correlation, if the intermediate principal stress factor exceeds a certain value, the intermediate principal stress coefficient and the plastic zone The size is positively correlated. Therefore, proper consideration of the effects of intermediate principal stresses in the support design of rocks around the roadway is very important for the stability of the rocks around the roadway.

**Keywords:** cohesion; internal friction angle; intermediate principal stress; Mogi-Coulomb criterion; plastic zone

收稿日期: 2021-07-03

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(52074115)

\* 通信作者, E-mail: wjwang@hnust.edu.cn

巷道围岩的稳定性与其塑性区有着本质的关联,塑性区的大小和形态决定着巷道的稳定性,因此研究塑性区的范围对围岩支护设计有重要意义.国内外学者关于塑性区的研究已有了丰富的成果.张小波等<sup>[1]</sup>以弹塑性力学为理论,在考虑中间主应力的基础上对巷道围岩塑性区展开了研究;王卫军等<sup>[2]</sup>在 M-C 强度准则的基础上,推导了非等压条件下圆形巷道塑性区边界方程;郭晓菲等<sup>[3]</sup>通过塑性区边界方程得到了塑性区的形态变化规律;袁超等<sup>[4]</sup>研究了岩石力学特性等对塑性区范围和形态的影响;陈立伟等<sup>[5]</sup>通过岩石的统一强度理论得到了可以描述塑性区边界形态的方程;张常光等<sup>[6-7]</sup>推导了理想弹塑性体塑性区围岩应力与位移的新解;马念杰等<sup>[8]</sup>通过研究围岩偏应力的分布规律得出了偏应力作用下的塑性区半径表达式;李宇翔等<sup>[9]</sup>研究了在非均匀应力场下中间主应力对塑性区的影响并得到了塑性区边界方程的近似隐式解;骆开静等<sup>[10]</sup>在考虑蠕变下建立了软化模型,并根据此软化模型对塑性区展开了研究;陈梁等<sup>[11]</sup>基于 D-P 强度准则,结合考虑岩石流变等对巷道围岩塑性区与破裂区进行了分析讨论;董海龙等<sup>[12]</sup>在考虑峰后软化的条件下推导了塑性区边界方程,并结合总荷载不变理论提供了塑性区半径的近似解.这些研究成果对塑性区的研究有着重要的意义.本文基于 Mogi-Coulomb 强度准则研究岩石岩性与中间主应力对巷道围岩塑性区形态与大小的作用,研究结果对巷道围岩支护设计具有重要意义.

## 1 Mogi-Coulomb 准则

目前大多数学者一般采用 Mohr-Coulomb 强度准则研究地下工程问题,实际上,地下工程岩体处于三维应力状态,而 Mogi-Coulomb 准则<sup>[13-16]</sup>是基于大量的真三轴实验所得,采用 Mogi-Coulomb 准则研究地下工程问题更加符合实际情况.Mogi-Coulomb 准则在  $\sigma_2 = \sigma_3$  ( $\sigma_2$  为中间主应力,  $\sigma_3$  为最小主应力) 时则退化成 Mohr-Coulomb 强度准则.Mogi-Coulomb 准则表示为

$$\tau_{\text{oct}} = a + b\sigma_{m,2}; \quad (1)$$

$$\tau_{\text{oct}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_1 - \sigma_3)^2}; \quad (2)$$

$$\sigma_{m,2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2}. \quad (3)$$

式中:  $\tau_{\text{oct}}$  为八面体剪应力;  $a, b$  为材料参数;  $\sigma_{m,2}$  为作用在剪切面上平均有效正应力.通过式(2)可知, Mogi-Coulomb 准则考虑了中间应力  $\sigma_2$  的作用. Mogi-Coulomb 准则的外形函数与 Mohr-Coulomb 强度准则密切相关,其外形函数可由图 1 表示.

当  $\sigma_2 = \sigma_3$  时,由 Mohr-Coulomb 强度准则可以得到:

$$a = \frac{2\sqrt{3}}{3}c \cos \varphi, b = \frac{2\sqrt{3}}{3} \sin \varphi. \quad (4)$$

式中:  $\varphi$  为岩石的内摩擦角;  $c$  为岩石的内聚力.

为了更好地研究中间主应力的影响,设定中间主应力系数的表达式为式(5),且  $0 \leq d \leq 1$ ,当  $d=0$  时,为轴对称的三轴压缩状态;当  $d=1$  时,为轴对称三轴拉伸状态;当  $0 < d < 1$  时,即为真三轴应力状态.

$$d = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_2}. \quad (5)$$

由式(5)变形可得  $\sigma_2 = d\sigma_1 + (1-d)\sigma_3$ ,将表达式代入式(1)整理后得到 Mogi-Coulomb 准则如下:

$$\sigma_1 = A\sigma_3 + B. \quad (6)$$

$$A = \frac{T_1 + 3b}{T_1 - 3b}, B = \frac{6a}{T_1 - 3b}. \quad (7)$$

式中:  $T_1 = 2[2(d^2 - d + 1)]^{1/2}$ ,当中间主应力系数  $d=0$  或  $1$  时,则没有考虑中间主应力的影响.

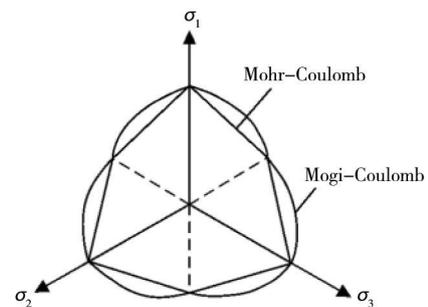


图 1 Mogi-Coulomb 准则的外形函数

## 2 圆形巷道围岩塑性区边界方程计算

### 2.1 力学模型

巷道围岩结构复杂,为了便于理论分析,对巷道围岩提出以下基本假设:

- 1) 围岩是满足 Mogi-Coulomb 准则的连续、均匀、各向同性的理想弹塑性材料.
- 2) 巷道为深埋巷道且巷道截面为圆形,巷道半径为  $R_0$ ,巷道无限长,按平面应变问题处理.
- 3) 巷道围岩处于两向非等压应力场, $P_0$  与  $kP_0$  分别为作用在巷道围岩上的垂直与水平应力, $k$  为侧压力系数, $R_p$  表示塑性区半径,支护力  $P_i$  视为均匀分布, $r$  为围岩中任一质点到巷道中心的距离.力学模型如图 2 所示.

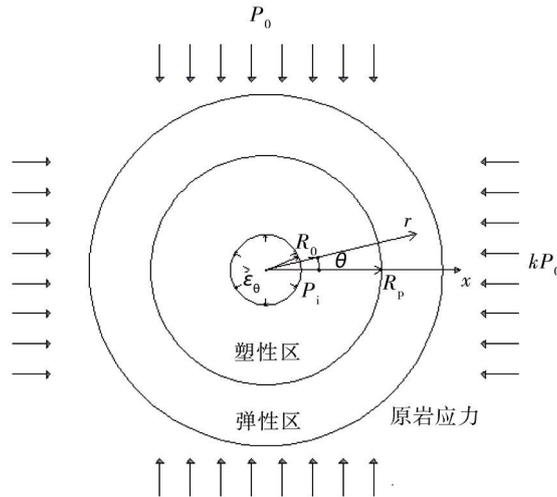


图 2 力学模型

### 2.2 塑性区边界方程求解

目前大多数研究采用近似隐式法来求巷道围岩塑性区的边界方程,采用近似隐式法求解的巷道围岩塑性区可以得到不同侧压系数下塑性区的形态,圆巷围岩塑性形态的变化规律可由其较好地反映出来.所以本文通过近似隐式法求圆形巷道围岩塑性区边界方程<sup>[17]</sup>.

当前还没有精确的解析能分析非均匀应力条件下的圆形巷道围岩的弹塑性区.大多数国内与国外的学者均是通过假设巷道开挖后围岩仍然处于弹性应力状态这一条件,结合弹性理论的基础上研究圆形巷道处于非均匀应力场开挖后的围岩弹性应力,其表达式为

$$\begin{cases} \sigma_r = \frac{P_0}{2}(1+k) \left(1 - \frac{R_0^2}{r^2}\right) - \frac{P_0}{2}(1-k) \left(1 - 4\frac{R_0^2}{r^2} + 3\frac{R_0^4}{r^4}\right) \cos 2\theta + P_i \frac{R_0^2}{r^2}; \\ \sigma_\theta = \frac{P_0}{2}(1+k) \left(1 + \frac{R_0^2}{r^2}\right) + \frac{P_0}{2}(1-k) \left(1 + 3\frac{R_0^4}{r^4}\right) \cos 2\theta - P_i \frac{R_0^2}{r^2}; \\ \tau_{r\theta} = \frac{P_0}{2}(1+k) \left(1 + 2\frac{R_0^2}{r^2} - 3\frac{R_0^4}{r^4}\right) \sin 2\theta. \end{cases} \quad (8)$$

弹性力学中,求解主应力的表达式为

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}; \\ \sigma_3 = \frac{(\sigma_x + \sigma_y)}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}. \end{cases} \quad (9)$$

在实际工程中,巷道围岩受力问题可以作为平面问题处理,利用转化公式可得到用极坐标表示的各应力关系式为

$$\begin{cases} \sigma_1 = \frac{(\sigma_r + \sigma_\theta)}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2}; \\ \sigma_3 = \frac{(\sigma_r + \sigma_\theta)}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2}. \end{cases} \quad (10)$$

围岩应力达到起塑条件后满足 Mogi-Coulomb 准则方程:

$$f = \sigma_1 - A\sigma_3 - B. \quad (11)$$

将  $\sigma_1, \sigma_3$  代入式(11)后令  $f=0$  可得

$$\frac{1}{2}(1+A)\sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + 4\tau_{r\theta}^2} - \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta)(A-1) - B = 0. \quad (12)$$

通过化解后得到塑性区边界隐式方程为

$$G(r) = m_0 + m_1 \frac{R_0^2}{r^2} + m_2 \frac{R_0^4}{r^4} + m_3 \frac{R_0^6}{r^6} + m_4 \frac{R_0^8}{r^8}. \quad (13)$$

式中:

$$m_0 = 1/4[(T_1+3b)/(T_1-3b)+1]^2(k-1)^2P_0^2 - [(T_1+3b)/(T_1-3b)-1]^2(k+1)^2P_0^2 - [(T_1+3b)/(T_1-3b)-1][6a/(T_1-3b)](k+1)P_0 - [6a/(T_1-3b)]^2;$$

$$m_1 = 1/4[(T_1+3b)/(T_1-3b)+1]^2[2(k-1)P_0(2P_i - kP_0 - P_0)\cos 2\theta - 4(k-1)^2P_0^2(2\cos^2 2\theta - 1)] + [(T_1+3b)/(T_1-3b)-1]^2(k^2-1)P_0^2\cos 2\theta + 2[(T_1+3b)/(T_1-3b)-1][6a/(T_1-3b)](k-1)P_0\cos 2\theta;$$

$$m_2 = 1/4[(T_1+3b)/(T_1-3b)+1]^2[(kP_0+P_0-2P_i)^2 + 4(k-1)P_0(kP_0+P_0-2P_i)\cos 2\theta + 2(k-1)^2P_0^2(6\cos^2 2\theta - 1)] - [(T_1+3b)/(T_1-3b)-1]^2(k-1)^2P_0^2\cos^2 2\theta;$$

$$m_3 = 3/2[(T_1+3b)/(T_1-3b)+1]^2(k-1)P_0[-(k+1)P_0\cos 2\theta + 2P_i\cos 2\theta - 2(k-1)P_0];$$

$$m_4 = 9/4[(T_1+3b)/(T_1-3b)+1]^2(k-1)^2P_0^2.$$

式(13)即为基于 Mogi-Coulomb 准则下的近似隐式法所得的巷道围岩塑性区边界方程.将侧压力系数  $k=1$  代入式(13),即可得到均匀应力场下塑性区边界方程,当侧压力系数  $k \neq 1$  时可求出非均匀应力场下的塑性区半径表达式.

### 3 算例分析

#### 3.1 内聚力对巷道围岩塑性区的影响

设定一定的圆形巷道围岩力学参数:取巷道半径  $R_0 = 2$  m,原岩地应力  $P_0 = 18$  MPa,支护力  $P_i = 0.75$  MPa,内摩擦角  $\varphi = 25^\circ$ ,中间主应力系数  $d=0$ ,将参数代入式(13)可以得到侧压系数  $k=1, k=0.7, k=0.3$  这3个不同条件下的内聚力对巷道围岩塑性区的影响如图3所示.由图3可知,在相同侧压力系数下,随着内聚力的增大,塑性区形态没有发生改变但巷道围岩塑性区的半径减小,且随着内聚力增大,塑性区半径减小的速度增大.此外,相同内聚力条件下,随着侧压系数  $k$  的增大,水平轴上的塑性区半径越来越大,竖轴上的塑性区半径越来越小.

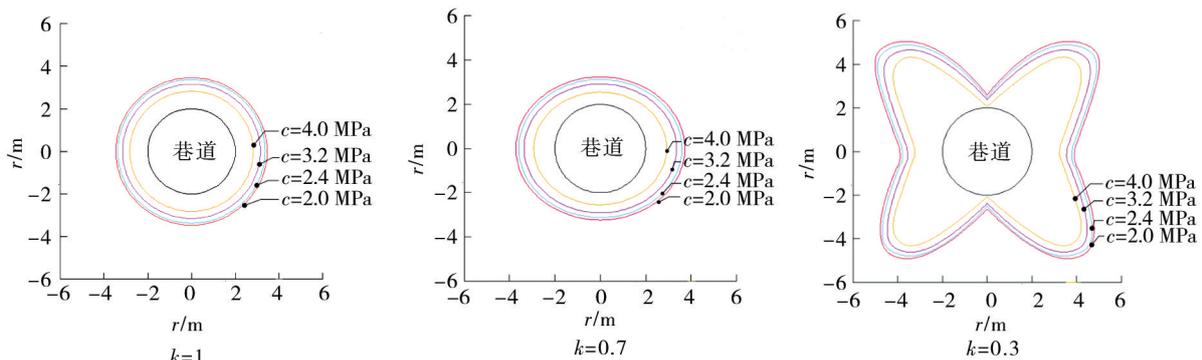


图3 内聚力与巷道围岩塑性区的关系

### 3.2 内摩擦角对巷道围岩塑性区的影响

巷道半径  $R_0=2\text{ m}$ ,原岩地应力  $P_0=18\text{ MPa}$ ,支护力  $P_i=0.75\text{ MPa}$ ,内聚力  $c=2\text{ MPa}$ ,中间主应力系数  $d=0$ ,将各力学参数代入式(13)可以得到侧压系数  $k=1, k=0.7, k=0.3$  这3个不同条件下的内摩擦角与巷道围岩塑性区的关系如图4所示.由图4可知,内摩擦角的变化不改变塑性区的形态但影响塑性区的大小,内摩擦角与塑性区的大小变化趋势相反,并且随着内摩擦角的增大,塑性区半径减小的速度减小.

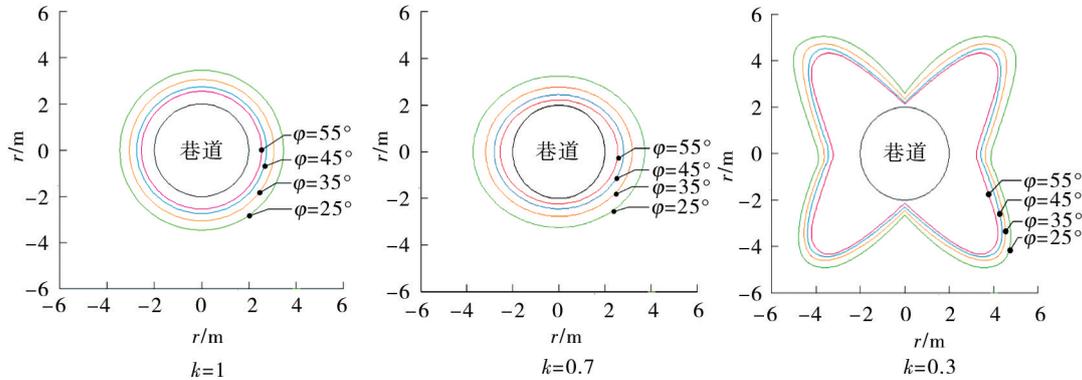


图4 内摩擦角与巷道围岩塑性区的关系

### 3.3 中间主应力系数对巷道围岩塑性区的影响

巷道半径  $R_0=2\text{ m}$ ,原岩地应力  $P_0=18\text{ MPa}$ ,支护力  $P_i=0.75\text{ MPa}$ ,内摩擦角  $\varphi=25^\circ$ ,侧压力系数  $k=1$ .将参数代入式(13)可得到中间主应力系数与塑性区半径的关系如图5所示.由图5可知,当  $0 \leq d \leq 0.7$  时,随着中间主应力系数的增加,塑性区的半径逐渐减小,当  $c=2$  时,塑性区半径由3.688减小至3.088,  $c=2.4$  时,塑性区半径由3.563减小至3.012,  $c=3.2$  时,塑性区半径由3.265减小至2.789,  $c=4$  时,塑性区半径由2.851减小至2.445;当  $0.7 \leq d \leq 1$  时,随着中间主应力系数的增加,塑性区的半径却呈现出增长趋势,当  $c=2$  时,塑性区半径由3.088增加至3.153,  $c=2.4$  时,塑性区半径由3.012增加至3.061,  $c=3.2$  时,塑性区半径由2.789增加至2.845,  $c=4$  时,塑性区半径由2.445增大至2.493.说明中间主应力对巷道围岩塑性区半径的影响具有区间效应.因此,在一定范围内增大中间主应力系数对巷道围岩的变形与塑性区的扩展具有一定的抑制作用.

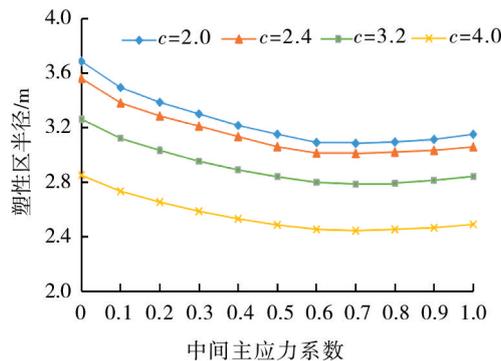


图5 中间主应力系数与塑性区半径的关系

## 4 结论

1) 内聚力与内摩擦角均不改变围岩塑性区的形态但对塑性区的大小产生不同的影响.内聚力与内摩擦角均与塑性区的大小呈负相关,但是随着内聚力的增大,塑性区半径减小的程度越大.而随着内摩擦角的增大,塑性区半径减小的程度越来越缓慢.

2) 中间主应力对巷道围岩塑性区有重要影响,当中间主应力系数小于0.7时,塑性区半径随着中间主

应力系数的增大而减小,当中间主应力系数大于0.7时塑性区半径随着中间主应力系数的增大而增大.因此在一定范围内增大中间主应力系数对巷道围岩的变形与塑性区的扩展具有一定的抑制作用.

#### 参考文献:

- [1] 张小波,赵光明,孟祥瑞.基于岩石非线性统一强度准则的非均匀应力场中圆形巷道围岩塑性区分析[J].安全与环境学报,2013,13(3):202-206.
- [2] 王卫军,董恩远,袁超.非等压圆形巷道围岩塑性区边界方程及应用[J].煤炭学报,2019,44(1):105-114.
- [3] 郭晓菲,郭林峰,马念杰,等.巷道围岩蝶形破坏理论的适用性分析[J].中国矿业大学学报,2020,49(4):646-653.
- [4] 袁超,张建国,王卫军,等.基于塑性区分布形态的软弱破碎巷道围岩控制原理研究[J].采矿与安全工程学报,2020,37(3):451-460.
- [5] 陈立伟,彭建兵,范文,等.基于统一强度理论的非均匀应力场圆形巷道围岩塑性区分析[J].煤炭学报,2007(1):20-23.
- [6] 张常光,张成林,周菲,等.圆形隧道弹塑性分析的强度理论效应研究[J].岩土工程学报,2018,40(8):1449-1456.
- [7] 张常光,范文,赵均海.深埋圆形巷道围岩塑性区位移及特征曲线新解和参数分析[J].岩土力学,2016,37(1):12-24.
- [8] 马念杰,李季,赵志强.圆形巷道围岩偏应力场及塑性区分布规律研究[J].中国矿业大学学报,2015,44(2):206-213.
- [9] 李宇翔,彭永久,林全坤,等.非对称荷载作用下圆形洞室塑性区边界的近似计算[J].公路工程,2012,37(4):128-131.
- [10] 骆开静,董海龙,高全臣.考虑流变和中间主应力的巷道围岩变形分区[J].煤炭学报,2017,42(s2):331-337.
- [11] 陈梁,茅献彪,李明,等.基于 Drucker-Prager 准则的深部巷道破裂围岩弹塑性分析[J].煤炭学报,2017,42(2):484-491.
- [12] 董海龙,高全臣.考虑流变特性的两向不等压巷道围岩塑性区近似解[J].煤炭学报,2019,44(2):419-426.
- [13] 张常光,曾开华.基于 Mogi-Coulomb 准则的围岩抗力系数新解[J].现代隧道技术,2016,53(5):31-34.
- [14] 蒋邦友,谭云亮,王连国,等.基于 Mogi-Coulomb 准则的弹塑性损伤本构模型及其数值实现[J].中国矿业大学学报,2019,48(4):784-792.
- [15] 丁立钦,王志乔,吕建国,等.基于围岩本体 Mogi-Coulomb 强度准则的层理性岩层斜井井壁稳定模型[J].岩石力学与工程学报,2017,36(3):622-632.
- [16] 吕彩忠.基于 Mogi-Coulomb 强度准则的隧道围岩理想弹塑性解答[J].土木建筑与环境工程,2014,36(6):54-59.
- [17] 蒋斌松,张强,贺永年,等.深部圆形巷道破裂围岩的弹塑性分析[J].岩石力学与工程学报,2007(5):982-986.