

# 基于上限定理的浅埋巷道掌子面稳定性分析

王国科\*

(浙江佳途勘测设计有限公司,浙江 丽水 323000)

**摘要:** 鉴于岩体的非线性特性,采用非线性 Baker 破坏准则,基于极限分析上限定理,研究了浅埋巷道掌子面的稳定性.根据能量耗散理论和掌子面的实际受力情况,引入非线性 Baker 破坏准则相关参数,建立了围岩压力的解析表达式.借助数学分析软件 Matlab,优化得到了围岩压力的最优解.研究结果阐述了非线性 Baker 破坏准则的 3 个无量纲参数对掌子面围岩压力和潜在破裂面的影响规律.研究结果对浅埋巷道的支护措施安全设计有重要指导意义.

**关键词:** 非线性 Baker 破坏准则;上限定理;隧道掌子面;围岩压力

**中图分类号:** TU434      **文献标志码:** A      **文章编号:** 1672-9102(2020)03-0041-07

## Stability Analysis of Shallow Tunnel Face Based on Upper Bound Theorem

Wang Guoke

(Zhejiang Jiayu Survey & Design Co., Ltd., Lishui 323000, China)

**Abstract:** In view of the nonlinear characteristics of rock mass, the stability of shallow tunnel face is studied by using nonlinear Baker failure criterion and upper bound theorem of limit analysis. According to the energy dissipation theory and the actual stress situation of the face, the analytical expression of the surrounding rock pressure is established by introducing the parameters related to the nonlinear Baker failure criterion. With the help of mathematical analysis software MATLAB, the optimal solution of surrounding rock pressure is obtained. Results show that the three dimensionless parameters of the nonlinear Baker failure criterion affect the surrounding rock pressure and potential fracture surface of the face. The research results have important guiding significance for the safety design of supporting measures of shallow tunnel.

**Keywords:** nonlinear Baker failure criterion; upper bound theorem; tunnel face; surrounding rock pressure

巷道开挖后,岩土原有的应力平衡被破坏,应力重新调整,掌子面形成应力集中,极易形成垮塌破坏,进而造成重大损失.因此,确定围岩压力成为掌子面稳定性分析中的关键问题,研究巷道掌子面的稳定性问题具有重要的理论价值和工程意义.

在岩土工程领域中,极限分析理论具有计算过程简单、快捷,计算结果较准确的优点<sup>[1]</sup>,所以,近几年在分析隧道稳定性问题中运用较广泛,基于非线性准则和极限分析法求解围岩压力已经被国内外许多学者采用<sup>[1]</sup>.Daniel 等<sup>[2]</sup>采用刚性块上限法和有限元极限分析法研究了方形巷道在不排水黏土中的稳定性,但是方形巷道在工程应用中并不多见,不太具有实际意义;Kentarō 等<sup>[3]</sup>研究了在荷载作用下黏性土中双圆弧巷道的稳定性问题,将双圆弧巷道的中心距作为一个新的问题参数,采用有限元极限分析技术得到了最终的附加荷载,但是其模式构建方法比较复杂,不便于在实际工程中进行推广和应用;Huang 等<sup>[4]</sup>研究了不排水黏性土不排水隧洞的稳定性,用多刚体块上限法得到了围岩压力的上限解析解,并对浅埋巷道平

面应变稳定问题进行了较为准确的预测,但假定剪切强度随深度呈线性增加不太符合实际;Salvador 等<sup>[5]</sup>基于极限分析法构建了隧道的旋转面垮塌机制,预测了临界压力和垮塌的类型;Nima 等<sup>[6]</sup>将土体黏聚力的线性变化与深度的极限分析的上限定理应用于封闭面开挖巷道掌子面的压力计算,采用强度折减法和上限定理计算了巷道掌子面失稳的安全系数,分析采用平均土壤凝聚力和局部凝聚力会在施工中带来的不良后果,但并未给出适合的土壤凝聚力的取值范围;杨小礼等<sup>[7]</sup>根据极限分析上限定理,推导了圆形浅埋巷道围岩压力的计算公式,并计算出了围岩压力的最优解,但其使用的圆形巷道破坏模式不太适用于实际工程中;Davis 等<sup>[8]</sup>假定了4种不同的破坏模式,根据极限分析法上限定理对黏性土在不排水条件下的浅埋巷道的围岩稳定性进行了分析;张佳华等<sup>[9]</sup>根据虚功率原理,从能量的角度出发,对浅埋偏压巷道的稳定性系数和支护力进行求解,并且对计算结果进行对比与分析,但其计算的精度有待提高;杨子汉等<sup>[10]</sup>通过构建二维多块体滑移破坏模式,采用极限分析法得到了不同饱和度下计算巷道掌子面破坏范围的公式,该多块体破坏模式并不是真正意义上的破坏模式,还需要做进一步的改进。

上述研究运用极限分析上限定理研究巷道稳定性问题,并且分别采用的是Mohr-Coulomb破坏准则或Hoek-Brown破坏准则.但是Mohr-Coulomb破坏准则和Hoek-Brown破坏准则都有一定的局限性,Mohr-Coulomb破坏准则更适合土体,Hoek-Brown破坏准则更适合于岩体.而非线性Baker破坏准则包括了这两种破坏准则,适用范围也更加广泛.为了扩大适用范围,本文采用非线性Baker破坏准则,运用极限分析上限法研究巷道开挖掌子面的稳定性.

## 1 非线性 Baker 破坏准则及其切线技术

Baker<sup>[11,12]</sup>基于三轴试验和已有试验研究结果,提出了一种广义的岩石强度准则.Baker提出的非线性强度准则如式(1).

$$\tau = P_a A \left( \frac{\sigma_n}{P_a} + T \right)^n \quad (1)$$

式中: $\tau$ 表示剪切应力; $P_a$ 表示大气压强; $\sigma_n$ 表示法向应力; $A, n$ 和 $T$ 为相关参数.

Jiang 等<sup>[13]</sup>人提出: $A$ 是一个尺度参数,影响剪切强度的大小; $n$ 表示破坏准则曲线的次数,影响强度包络线的曲率,受岩石剪切强度的影响; $T$ 表示转换参数,控制着强度包络线与 $\sigma_n$ 轴的交点. $A, n$ 和 $T$ 的取值范围分别为<sup>[14]</sup> $A > 0, 1/2 \leq n \leq 1, T \geq 0$ .当 $n = 1, A = \tan\varphi_t, T = \frac{c}{(P_a \tan\varphi_t)}$ 时,式(1)即可表示为Mohr-

Coulomb强度准则;当 $n = 0.5, A = 2\sqrt{\frac{t}{P_a}}, T = \frac{t}{P_a}$ 时,即为格里菲斯强度准则.

通过切线技术<sup>[15]</sup>,将非线性Baker强度准则式(1)写成Mohr-Coulomb强度准则的形式,式(1)通过固定点 $(0, P_a A T^n)$ 和 $(-P_a T, 0)$ 两点.将式(1)绘制成曲线,见图1.

对于强度包络线上的任意一点 $M$ ,其对应的Mohr-Coulomb强度准则的表达式为

$$\tau = c_t + \tan\varphi_t \cdot \sigma_n \quad (2)$$

式中: $c_t$ 和 $\varphi_t$ 分别为 $M$ 点处的黏聚力和内摩擦角,可由式(3)和(4)确定.

$$\tan\varphi_t = \frac{d\tau}{d\sigma_n} = nA \left( \frac{\sigma_n}{P_a} + T \right)^{n-1}; \quad (3)$$

$$c_t = \frac{1-n}{n} P_a \tan\varphi_t \left( \frac{\tan\varphi_t}{nA} \right)^{\frac{1}{n-1}} + P_a T \tan\varphi_t. \quad (4)$$

其中式(4)即为Baker强度准则下几个非线性参数的关系式.

## 2 极限分析上限定理

极限分析法以一种理想的方式考虑了岩土体的应力应变关系.上限定理要求对于任意机动容许的破

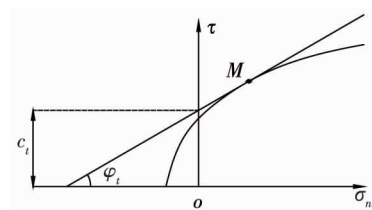


图1 非线性 Baker 破坏准则表示的强度曲线

坏机制,内能损耗率不小于外力功率,可用式(5)表示.

$$\int_V \sigma_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} dV \geq T_i \int_V v_i dS + F_i \int_V v_i dV. \quad (5)$$

式中:  $S$  和  $V$  分别为表面力作用面积和破坏的岩土体体积;  $T_i$  表示表面力;  $F_i$  表示体积力;  $\sigma_{ij}$  表示与  $F_i$  和  $T_i$  关联的应力场;  $v_i$  为机动容许的速度场;  $\dot{\epsilon}_{ij}$  表示与  $v_i$  相容的应变率场.对于简单的巷道掌子面稳定性分析问题,根据极限分析内能损耗率不小于外力功率原则,令发生破坏部分土体的重力做功的功率和开挖机械作用于掌子面上的支护力做功的功率和仅发生在沿破坏面的速度间断面上的内能耗散相等即可求解出围岩压力值.

### 3 破坏模式的构建

许敬叔等<sup>[16]</sup>采用的对数双螺旋破坏模式已被证明适用于浅埋巷道掌子面的稳定性研究.本文基于对数双螺旋破坏模式构建的掌子面前方土体的主动破坏模式,如图2所示.破坏范围由两条对数螺旋线  $HE$  和  $BE$  组成,  $r_a, r_b$  分别表示  $OH, OB$  的长度.  $O$  为  $HE$  和  $BE$  的旋转中心.两条对数螺旋线绕旋转中心  $O$  点以恒定的角速度  $\omega$  转动.两条对数螺旋线相交于  $E$  点,在  $E$  点形成一个大小为  $2\varphi_i$  的夹角.  $OH, OB, OE$  与竖直方向的夹角分别为  $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ .  $C$  表示巷道的深度,  $D$  表示巷道的宽度.  $HB$  为巷道的掌子面.开挖过程中,掌子面的支护荷载视为均布荷载,用  $\sigma_0$  表示.

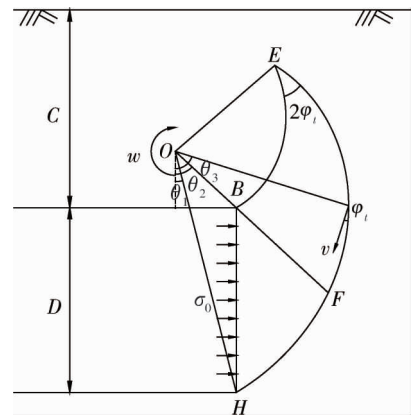


图2 浅埋巷道掌子面破坏模式

其中:对数螺旋线  $HE$  和  $BE$  的表达式如式(6)和式(7)所示.

$$r_1 = r_a \exp[(\theta_1 - \theta) \tan \varphi_i]; \quad (6)$$

$$r_2 = r_b \exp[(\theta - \theta_2) \tan \varphi_i]. \quad (7)$$

根据几何关系式可得式(8)~式(10):

$$r_a = \frac{D \sin \theta_2}{\sin(\theta_2 - \theta_1)}; \quad (8)$$

$$r_b = \frac{r_a \sin \theta_1}{\sin \theta_2}; \quad (9)$$

$$\theta_3 = \frac{1}{2} \left[ \theta_1 + \theta_2 - \frac{\ln \left( \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} \right)}{\tan \varphi_i} \right]. \quad (10)$$

式中:  $r_a$  和  $r_b$  为  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的函数;  $\theta_3$  为  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的函数.

### 4 计算过程

#### 4.1 土体重力功率的计算

为了方便计算土体重力的功率,将破坏模式分成  $BHF$  和  $BFE$  这2个部分分别计算各自土体重力的功率,如图2所示.两部分土体重力的功率之和即为所求的土体重力功率.

在区域  $OHF$  中,土体重力的外功率可用式(11)计算.

$$W_{OFH} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \gamma d(Av \sin \theta) = \omega \gamma r_a^3 f_1(\theta_1, \theta_2). \quad (11)$$

其中函数  $f_1(\theta_1, \theta_2)$  的表达式为

$$f_1(\theta_1, \theta_2) = \exp(3\theta_1) \{ -3 \tan \varphi_i [ \exp(-3\theta_2 \tan \varphi_i) \sin \theta_2 - \exp(-3\theta_1 \tan \varphi_i) \sin \theta_1 ] - \exp(-3\theta_2 \tan \varphi_i) \cos \theta_2 + \exp(-3\theta_1 \tan \varphi_i) \cos \theta_1 \} / [3(1 + 9 \tan^2 \varphi_i)]. \quad (12)$$

三角形区域  $OHB$  的土重做功的功率可用式(13)表示.

$$W_{OHB} = \omega \gamma r_a^2 r_b f_2(\theta_1, \theta_2). \quad (13)$$

式(13)即三角形区域  $OHB$  的面积与土重  $\gamma$  与其重心处的速度在竖直方向的分量的乘积,其中函数

$f_2(\theta_1, \theta_2)$  的表达式为

$$f_2(\theta_1, \theta_2) = \frac{1}{3} \sin(\theta_2 - \theta_1) \sin\theta_2. \quad (14)$$

由此可得区域  $BHF$  土体重力做功的功率为区域  $OFH$  的土重做功的功率减去区域  $OHB$  的土重做功的功率,即:

$$W_1 = W_{OFH} - W_{OHB}. \quad (15)$$

对数螺旋线区域  $OBE$  的土体重力做功功率为

$$W_{OBE} = \int_{\theta_2}^{\theta_3} \left( \frac{2}{3} \omega r_2 \sin\theta \right) \left( \frac{1}{2} \gamma r_2^2 d\theta \right) = \omega \gamma r_2^3 f_3(\theta_2, \theta_3). \quad (16)$$

其中,函数  $f_3(\theta_2, \theta_3)$  的表达式为

$$f_3(\theta_2, \theta_3) = \{3 \tan\varphi_t [\exp(3\theta_3 \tan\varphi_t) \sin\theta_3 - \exp(3\theta_2 \tan\varphi_t) \sin\theta_2] - \exp(3\theta_3 \tan\varphi_t) \cos\theta_3 + \exp(3\theta_2 \tan\varphi_t) \cos\theta_2\} / [3 \exp(3\theta_2 \tan\varphi_t) (1 + 9 \tan^2\varphi_t)]. \quad (17)$$

对数螺旋线区域  $OFE$  的土重做功功率为

$$W_{OFE} = \int_{\theta_2}^{\theta_3} \left( \frac{2}{3} \omega r_1 \sin\theta \right) \left( \frac{1}{2} \gamma r_1^2 d\theta \right) = \omega \gamma r_1^3 f_4(\theta_2, \theta_3). \quad (18)$$

其中函数  $f_4(\theta_2, \theta_3)$  的表达式为

$$f_4(\theta_2, \theta_3) = \exp(3\theta_1 \tan\varphi_t) \{ -3 \tan\varphi_t [\exp(-3\theta_3 \tan\varphi_t) \sin\theta_3 - \exp(-3\theta_2 \tan\varphi_t) \sin\theta_2] - \exp(-3\theta_3 \tan\varphi_t) \cos\theta_3 + \exp(-3\theta_2 \tan\varphi_t) \cos\theta_2 \} / [3(1 + 9 \tan^2\varphi_t)]. \quad (19)$$

所以对数螺旋区域  $BFE$  的土体重力做功的功率可表示为

$$W_2 = W_{OFE} - W_{OBE}. \quad (20)$$

整个破坏模式土体重力做功功率为区域  $BHF$  与区域  $BFE$  两部分的土体重力做功的功率之和,即:

$$W = W_1 + W_2. \quad (21)$$

#### 4.2 掌子面围岩压力功率计算

$\sigma_0$  可简化成均匀分布,其做功功率可用式(22)计算:

$$P = -\sigma_0 \omega r_a^2 f_5(\theta_1, \theta_2). \quad (22)$$

式中: $f_5(\theta_1, \theta_2)$  的表达式如式(23).

$$f_5(\theta_1, \theta_2) = \sin^2\theta_1 \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos\theta}{\sin^3\theta} d\theta. \quad (23)$$

#### 4.3 内能损耗率计算

掌子面前方土体不同点的速度的大小和方向都不相同,内能损耗发生在两个速度间断面  $HE$  与  $BE$  上,速度间断面  $BE$  与  $HE$  上的内能损耗可分别由式(24)和式(25)计算.

$$D_{BE} = \int_{\theta_2}^{\theta_3} c_t \left( \frac{r_2 d\theta}{\cos\varphi_t} \right) \cdot (\omega r_2 \cos\varphi_t) = \omega c_t r_2^2 f_6(\theta_2, \theta_3); \quad (24)$$

$$D_{HE} = \int_{\theta_1}^{\theta_3} c_t \left( \frac{r_1 d\theta}{\cos\varphi_t} \right) \cdot (\omega r_1 \cos\varphi_t) = \omega c_t r_1^2 f_7(\theta_1, \theta_3). \quad (25)$$

式中:  $\left( \frac{r_2 d\theta}{\cos\varphi_t} \right)$ ,  $\left( \frac{r_1 d\theta}{\cos\varphi_t} \right)$  分别表示  $BE$  和  $HE$  两个速度间断面上的微元面积;  $(\omega r_2 \cos\varphi_t)$ ,  $(\omega r_1 \cos\varphi_t)$  分别表示对数螺旋线  $BE$  和  $HE$  上微元对应的速度在速度间断面切向分量.其中  $f_6(\theta_2, \theta_3)$  和  $f_7(\theta_1, \theta_3)$  的表达式为

$$f_6(\theta_2, \theta_3) = \frac{1}{2 \tan\varphi_t} \{ \exp[2(\theta_3 - \theta_2) \tan\varphi_t] - 1 \}; \quad (26)$$

$$f_7(\theta_1, \theta_3) = \frac{1}{2 \tan\varphi_t} \{ 1 - \exp[2(\theta_1 - \theta_3) \tan\varphi_t] \}. \quad (27)$$

破坏模式总的内能损耗功率为

$$D = D_{HE} + D_{BE}. \quad (28)$$

### 4.4 围岩压力的求解

根据外功率等于内能损耗率,则有

$$D = W + P. \tag{29}$$

将式(21)、式(22)和式(28)代入式(29),通过数学方法化简,计算,即可得到围岩压力的最终表达式为

$$\sigma_0 = \frac{\gamma r_a^3(f_1 + f_4) - \gamma r_a^2 r_b f_2 - \gamma r_b^3 f_3 - c_t(r_b^2 f_6 + r_a^2 f_7)}{r_a^2 f_5}. \tag{30}$$

式中: $f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7$  为  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的函数.那么围岩压力  $\sigma_0$  也为  $\theta_1$  和  $\theta_2$  的函数.

### 4.5 约束条件的确定

为求出式(30)的最大值,需要在一定的约束条件下对其进行优化,式中的物理参数要符合岩土体材料的特性,几何参数要具有实际的几何意义.综上,可确定约束条件如式(31).

$$\begin{cases} 0 < \theta_1 < \theta_2 < \frac{\pi}{2}; \\ \theta_2 < \theta_3 < \pi; \\ r_a > r_b. \end{cases} \tag{31}$$

结合上限定理,采用序列二次规划算法,通过 Matlab 软件编程来求解  $\sigma_0$  的最优解.

## 5 结果分析

本文主要研究 Baker 准则中的 3 个参数  $A, T, n$  及埋深比  $C/D$ , 土体容重  $\gamma$  对巷道破坏的影响.在计算中,各相关的参数取值为土体容重  $\gamma = 20 \sim 24 \text{ kN/m}^3$ ,  $C/D = 1.0 \sim 2.0$ .无量纲参数  $A = 0.4 \sim 0.8$ .  $T = 0.01 \sim 0.05$ .  $n = 0.5 \sim 0.9$ .计算结果如图 3~图 8 所示.

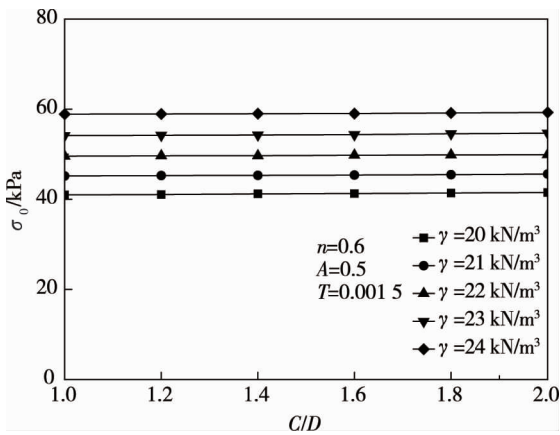


图 3  $\gamma$  和  $C/D$  对围岩压力  $\sigma_0$  的影响

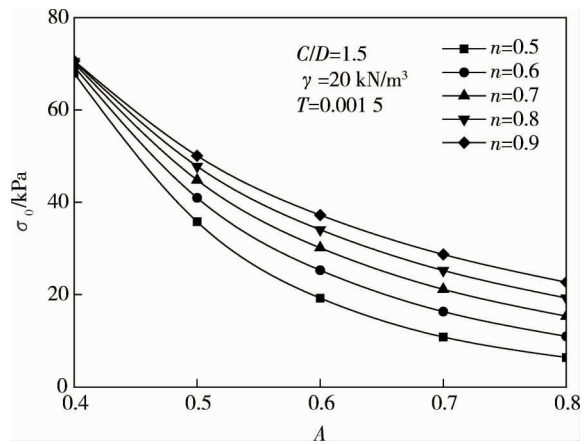


图 4 无量纲参数  $A$  和  $n$  对围岩压力  $\sigma_0$  的影响

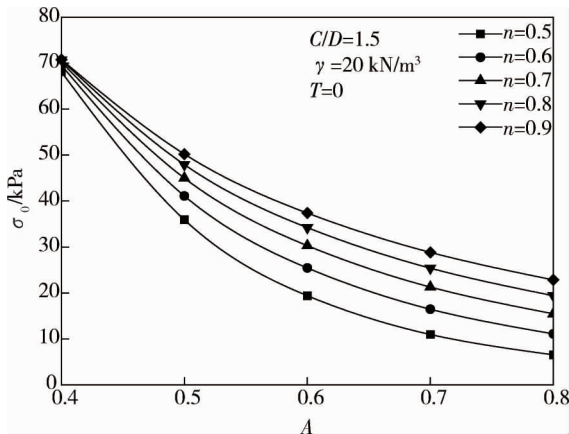


图 5 无量纲参数  $A$  和  $n$  对围岩压力  $\sigma_0$  的影响( $T=0$ )

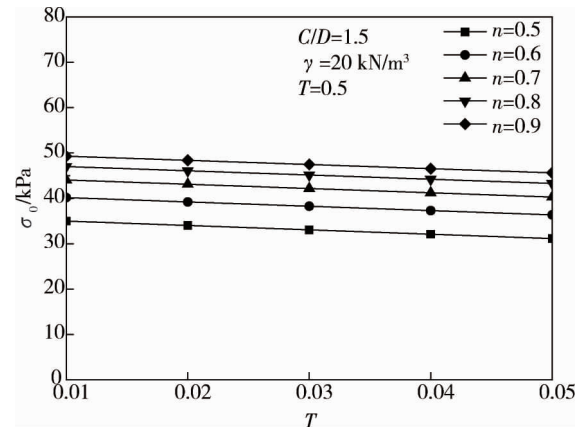


图 6 无量纲参数  $T$  和  $n$  对围岩压力  $\sigma_0$  的影响

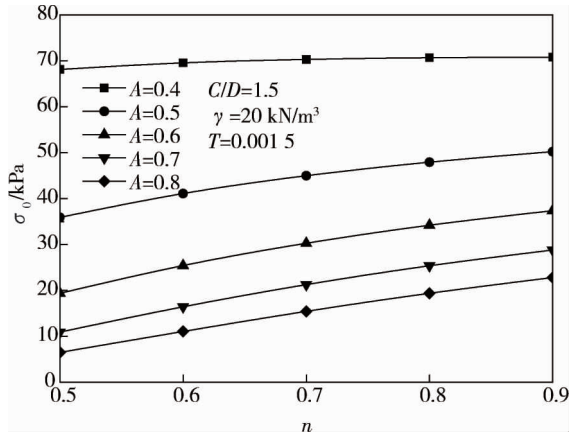


图7 无量纲参数  $n$  和  $A$  对围岩压力  $\sigma_0$  的影响

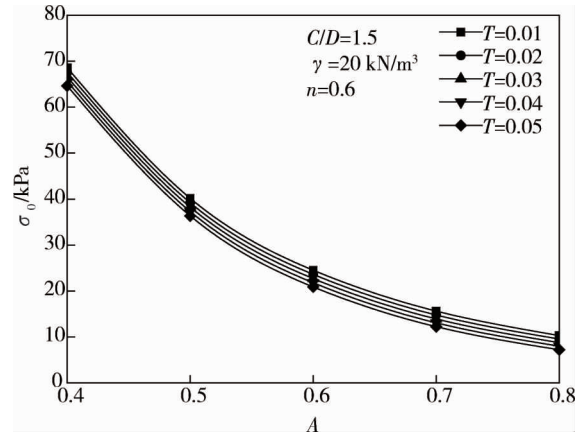


图8 无量纲参数  $A$  和  $T$  对围岩压力  $\sigma_0$  的影响

埋深比  $C/D$  从 1.0~2.0 变化,土体容重  $\gamma$  分别为 20,21,22,23,24  $\text{kN/m}^3$  条件下, $C/D$  和  $\gamma$  对围岩压力  $\sigma_0$  的影响见图 3.从图 3 中可以看出:在  $\gamma$  相同的条件下,围岩压力几乎不随  $C/D$  变化;在  $C/D$  相同的条件下,围岩压力随  $\gamma$  的增加而增加.

当无量纲参数  $T=0.0015$ , $A$  从 0.4~0.8 变化, $n$  分别为 0.5,0.6,0.7,0.8,0.9 条件下, $A$  和  $n$  对围岩压力  $\sigma_0$  的影响见图 4.从图 4 中可以看出:在  $n$  相同的条件下,围岩压力  $\sigma_0$  随着  $A$  的增加而减小;在  $A$  相同的条件下,围岩压力  $\sigma_0$  随着  $n$  的增大而增大.在此特别讨论了当  $T=0$  时的情况, $T=0$  为纯摩擦材料的强度准则(PF 模型),见图 5.结果表明  $T=0$  的变化规律和  $T \neq 0$  时基本相同.当无量纲参数  $A=0.5$ , $T$  从 0.01~0.05 变化, $n$  分别为 0.5,0.6,0.7,0.8,0.9 条件下, $T$  和  $n$  对围岩压力  $\sigma_0$  的影响见图 6.从图 6 中可以看出:在  $n$  相同的条件下,围岩压力  $\sigma_0$  随着  $T$  的增加而减小;在  $T$  相同的条件下,围岩压力  $\sigma_0$  随着  $n$  的增大而增大.当无量纲参数  $T=0.0015$ , $n$  从 0.5~0.9 变化, $A$  分别为 0.4,0.5,0.6,0.7,0.8 条件下, $A$  和  $n$  对围岩压力  $\sigma_0$  的影响见图 7.从图 7 中可以看出:在  $T$  相同的条件下,围岩压力  $\sigma_0$  随着  $A$  和  $n$  的增加而增加.当无量纲参数  $n=0.5$ , $A$  从 0.4~0.8 变化, $T$  分别为 0.01,0.02,0.03,0.04,0.05 条件下, $A$  和  $T$  对围岩压力  $\sigma_0$  的影响见图 8.从图 8 中可以看出:在  $T$  相同的条件下,围岩压力  $\sigma_0$  随着  $A$  的增加而减小;在  $A$  相同的条件下,围岩压力  $\sigma_0$  随着  $T$  的增大而减小.

绘制了不同埋深比和无量纲参数  $A, T, n$  对破坏模式的形状的影响,结果如图 9 所示.

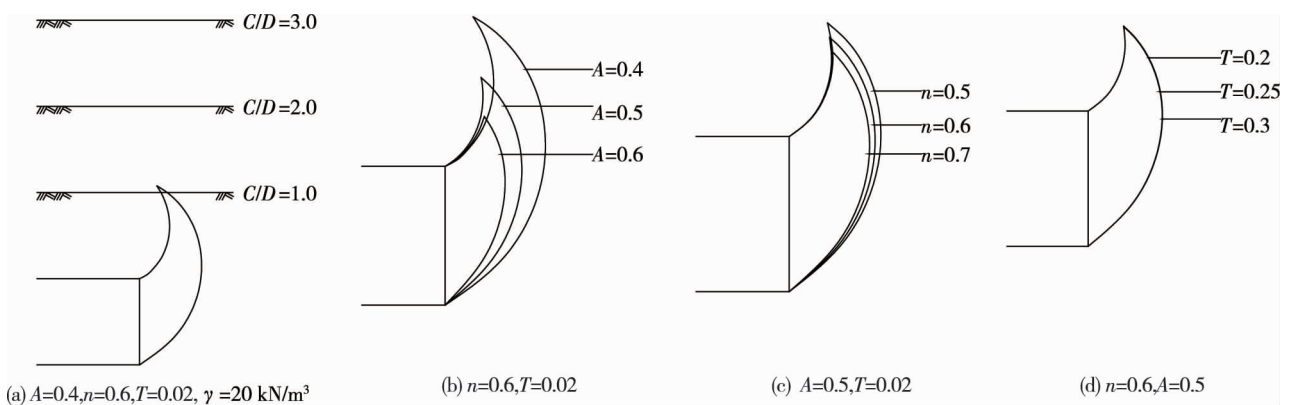


图9 各参数对破坏模式的影响

埋深比对破坏模式的形状影响如图 9a 所示,从图 9a 中可以看出,埋深比的变化并不会影响破坏模式的形状,但是会影响破坏范围是否会伸出地表.如果埋深比过小,破坏模式会在地面发生拱起破坏,最小埋深比应大于 1.5.无量纲参数  $A, T, n$  对破坏模式的影响如图 9b~图 9d 所示.从图中可以看出,当  $A$  减小时,破坏范围逐渐增大,由掌子面向前方外扩,破坏模式的形状由短胖变得狭长;当  $n$  逐渐增大时,破坏范围逐渐减小,与  $A$  不同的是,其主要影响的是“牛角”下方的范围,即影响破坏模式的深度;而  $T$  对破坏模式的形状基本无影响.

## 6 结论

- 1) 非线性 Baker 准则的 3 个参数对围岩压力和掌子面破坏范围的影响各不相同.
- 2) 随着  $A$  的增大, 围岩压力非线性减小, 破坏范围不断扩大.
- 3) 随着  $n$  的增大, 围岩压力非线性增大, 破坏范围也呈增大趋势.
- 4) 随着  $T$  的增大, 围岩压力呈线性递减的趋势, 破坏范围几乎无变化.

## 参考文献:

- [1] 中华人民共和国铁道部. 铁路隧道设计规范: TB 10003—2005[S]. 2005.
- [2] Daniel W W, Andrew J A, Scott W S, et al. Undrained stability of a square tunnel where the shear strength increases linearly with depth[J]. *Computers and Geotechnics*, 2013, 49: 314–325.
- [3] Kentaro Y, Andrei V L, Daniel W W, et al. Stability of dual circular tunnels in cohesive–frictional soil subjected to surcharge loading[J]. *Computers and Geotechnics*, 2013, 50: 41–54.
- [4] Huang M S, Song C X. Upper-bound stability analysis of a plane strain heading in non-homogeneous clay[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2013, 38: 213–223.
- [5] Salvador S, Rafael J. A tunnel face failure mechanism for layered ground, considering the possibility of partial collapse[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2015, 47: 182–192.
- [6] Nima K, Hisham M, Mohsen H, et al. The stability of shallow circular tunnels in soil considering variations in cohesion with depth[J]. *Tunnelling and Underground Space Technology*, 2015, 49: 230–240.
- [7] 杨小礼, 王作伟. 非线性破坏准则下浅埋隧道围岩压力的极限分析[J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2010, 41(1): 299–302.
- [8] Davis E H, Gunn M J, Mair R J, et al. The stability of shallow tunnel and underground openings in cohesive material[J]. *Geotechnique*, 1980, 30(4): 397–416.
- [9] 张佳华, 杨小礼, 张标, 等. 基于非线性破坏准则的浅埋偏压隧道稳定性分析[J]. *华南理工大学学报(自然科学版)*, 2014, 42(8): 97–103.
- [10] 杨子汉, 杨小礼, 张佳华, 等. 不同饱和度下破碎软岩隧道掌子面破坏范围上限分析[J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2015, 46(6): 2267–2273.
- [11] Baker R. Non-linear strength envelopes based on triaxial data[J]. *ASCE Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, 2004, 130(5): 498–506.
- [12] Baker R, Frydman S. Upper bound limit analysis of soil with non-linear failure criterion[J]. *Soils and Foundations*, 1983, 23(4): 34–42.
- [13] Jiang J C, Baker R, Yamagami T. The effect of strength envelope nonlinearity on slope stability calculations [J]. *Can Geotech J*, 2003, 40(2): 308–25.
- [14] Baker R, Frydman S. Upper bound limit analysis of soil with non-linear failure criterion[J]. *Soils and Foundations*, 1983, 23(4): 34–42.
- [15] 赵炼恒, 李亮, 但汉成, 等. 极限上限分析中“切线法”引入非线性破坏准则的探讨[J]. *长江科学院院报*, 2010, 27(8): 34–39.
- [16] 许敬叔, 潘秋景. 盾构隧道开挖面支护力上限分析[J]. *铁道科学与工程学报*, 2014, 11(4): 80–84.