

# 基于弹塑性理论的节理处 锚杆剪切变形机理分析

马超甫<sup>1</sup>,冯涛<sup>1\*</sup>,姚琦<sup>1</sup>,王平<sup>2</sup>,廖泽<sup>1</sup>

(1. 湖南科技大学 能源与安全工程学院,湖南 湘潭 411201;2. 中南大学 资源与安全工程学院,湖南 长沙 410083)

**摘要:**为了研究节理面处锚杆的剪切变形机制,建立了节理岩体中锚杆的受力模型,对锚杆在节理面处的剪切变形进行了理论分析,利用单位载荷法推导了节理面处锚杆竖向位移与载荷、节理宽度、材料性质间的关系.理论分析表明,节理岩体中锚杆的剪切变形过程为:小挠度变形阶段、弹塑性剪切变形阶段、塑性铰阶段;剪切变形至塑性铰阶段时,节理面处杆体将出现两个塑性铰;节理面处锚杆具有一段结构对称、载荷反对称部分;节理宽度对节理处杆体的弹性区、弹塑性区的分界面位置存在线性影响.

**关键词:**节理岩体;锚杆;剪切变形;弹塑性

**中图分类号:**TD353.6

**文献标志码:**A

**文章编号:**1674-5876(2016)03-0008-07

## Mechanism analysis of shear deformation of joint bolt based on elastic – plastic theory

MA Chaofu<sup>1</sup>, FENG Tao<sup>1</sup>, YAO Qi<sup>1</sup>, WANG Ping<sup>2</sup>, LIAO Ze<sup>1</sup>

(1. School of Energy and Safety Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201, China;

2. School of Resources and Safety Engineering, Central South University, Changsha 410083, China)

**Abstract:** The stressing model of anchor bolt in jointed rock mass is established to study the shear deformation mechanism of jointed rock bolts, and the shear deformation at the joints is analyzed theoretically. Relationships between vertical displacement and load, and joint width and material properties of anchor bolt in the vicinity of the joint plane are deducted. The theoretical analysis shows that the shear deformation process of anchor bolt in jointed rock has the following stages, i. e. small deflection deformation stage, elastic – plastic shear deformation stage, and plastic hinge stage. In plastic hinge stage, two plastic hinges will appear on the anchor bolt near the joint plane. The anchor bolt has a section of body of symmetrical structure and anti – symmetrical load near the joint plane. The joint width has linear effect on Interface position between elastic region and elastic – plastic region near the joint.

**Key words:** jointed rock; anchor bolt; shear deformation; elastic – plastic

随着锚杆支护技术的发展与日渐成熟,锚杆支护已经成为我国矿井支护的主要方式.但由于能源消耗量和开采强度的加大,国内的矿井开采对象已经由浅部资源向深部资源、简单赋存条件转向复杂赋存条件.在深部工程岩体的复杂条件及环境下,锚杆支护失效问题出现多样化,如:拉断破坏、扭曲破坏、剪弯破坏、剪断破坏<sup>[1]</sup>.

针对锚杆的拉断破坏问题,近年来锚杆已经从低强度向高强度发展<sup>[2]</sup>、由低延伸率向大延伸率发

收稿日期:2015-12-18

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51274095);湖南省研究生科研创新基金资助项目(CX2015B507)

\*通信作者,E-mail: tfeng@hunst.edu.cn

展<sup>[3]</sup>. 在锚杆剪弯、剪断破坏问题上,国内外学者做了大量研究:其中葛修润等<sup>[4]</sup>对加锚节理面的锚杆抗剪性能进行了理论与试验研究,探讨了锚杆安装角对加锚节理面抗剪强度的影响;张伟等<sup>[1,5]</sup>分析了节理岩体中锚杆的综合变形,并通过试验研究了预应力锚杆对节理面的抗剪性能;王刚等<sup>[6]</sup>通过数值模拟对双曲线锚杆本构模型在岩体节理面处受剪切作用的力学响应进行了研究;Yoshinaka<sup>[7]</sup>, Spang<sup>[8]</sup>, Ferrero<sup>[9]</sup>等分别对加锚岩体进行了不同形式的剪切试验. 国内外学者对加锚节理面岩体抗剪强度及影响因素做了大量研究,对锚杆支护机理的发展与完善做出了贡献,但是对加锚节理岩体中锚杆自身材料的力学响应的研究存在不足. 本文建立了端部锚固方式下节理岩体中锚杆的受力模型,然后利用弹塑性理论对锚杆在节理面处的剪切变形机理进行了理论分析,旨在为在节理面处的锚杆支护提供参考.

## 1 节理围岩中锚杆受力模型

图1为节理岩体中端部锚固锚杆受力模型. 锚杆水平布置,其受力有:上下部边界载荷、锚杆外端托盘及螺母的预紧力 $P$ ,锚孔底部的锚固剂段轴向力分布力 $p$ . 锚杆与孔壁的间隙宽为 $e_1$ ,节理及夹层总宽度为 $e_2$ . 假设围岩体中的节理角度与锚杆轴向垂直. 该锚杆受力模型中存在垂直边界载荷和垂直节理,节理两侧受力不均衡时,模型中将出现左右岩块沿节理面相对滑动的趋势.

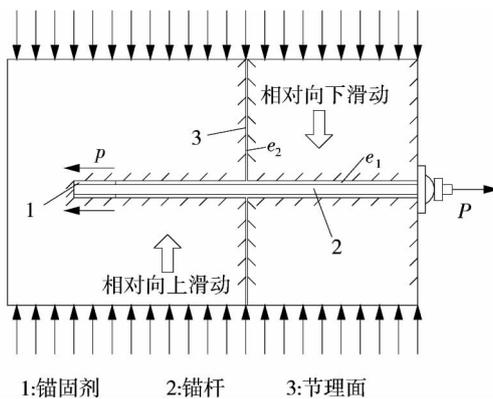


图1 节理岩体端锚锚杆受力模型

## 2 锚杆剪切变形分析

### 2.1 锚杆材料性质

对于矿井中常用的锚杆,一般选用牌号为 Q235, HRB335, HRB400, HRB500 等钢材,这些锚杆的应力-应变曲线均满足图2a 普通锚杆应力-应变曲线. 为简化问题,在此将其简化为图2b 理想弹塑性锚杆应力-应变曲线,其应力-应变满足关系如下:

$$\sigma = \begin{cases} E\varepsilon, & |\varepsilon| \leq \varepsilon_s; \\ \sigma_s \sin \varepsilon, & |\varepsilon| > \varepsilon_s. \end{cases} \quad (1)$$

式中, $E$ :材料弹性模量; $\varepsilon_s$ :材料的屈服应变; $\sigma_s$ :材料的屈服应力.

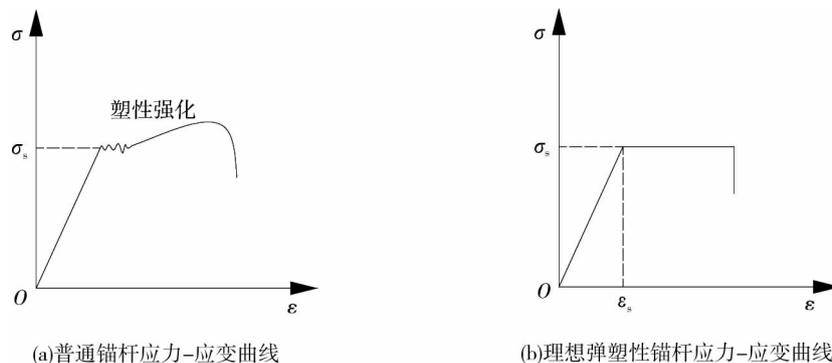


图2 锚杆应力-应变曲线

## 2.2 锚杆剪切变形弹塑性分析

由图1锚杆受力模型可知,锚杆在孔底通过锚固剂锚固,孔口处通过托盘及螺母紧固.

当该区域围岩中节理两侧受力不平衡时,左右两岩块体将产生相对滑动.锚杆与孔壁间存在一定间隙,故右块体将首先相对向下滑动至与节理外杆体接触.块体与锚杆接触时,杆体所受的横向载荷为 $q$ .此时杆体开始受到横向载荷的作用,假设预紧力 $P$ ,轴向力分布力 $p$ 对杆体弯矩影响相对于横向载荷 $q$ 可忽略,且假设岩块相对滑动中保持完整不破碎,则该锚杆的受力情况可简化为一受均布载荷作用的悬臂梁.见图3锚杆起始受力简化图.

右块体接触锚杆后继续滑移,锚杆会随着右块体的滑移产生挠曲,直至截面 $C$ 处杆体接触孔壁,此时 $C, D$ 处杆体均接触孔壁,此刻即为开始产生剪切变形的临界点.见图4锚杆受剪切荷载示意图.

节理围岩中端锚锚杆的变形分为3个阶段:小挠度变形阶段、弹塑性剪切变形阶段、塑性铰阶段.

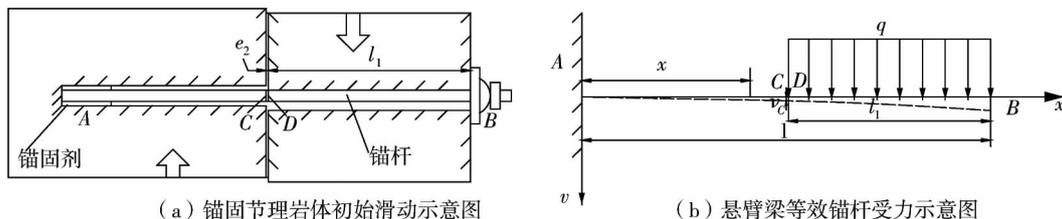


图3 锚杆起始受力简化图

### 2.2.1 小挠度变形阶段

如图3b所示,锚杆的弯矩方程<sup>[10]</sup>为

$$M(x) = \begin{cases} AD \text{ 段: } -ql_1(l-x-\frac{l_1}{2}), (x < l-l_1); \\ DB \text{ 段: } -\frac{q}{2}(l-x)^2, (x \geq l-l_1). \end{cases} \quad (2)$$

其挠曲线微分方程为

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}. \quad (3)$$

式(3)中的正负号取决于挠曲线所选用的坐标系.将式(2)代入式(3),且有边界条件 $x=0, \theta_{AD}(A)=0, v_{AD}(A)=0$ ,可得锚杆转角及挠曲线方程依次为

$$AD \text{ 段} \begin{cases} \theta_{AD} = \frac{ql_1}{EI} \left[ \left( l - \frac{l_1}{2} \right) x - \frac{x^2}{2} \right]; \\ v_{AD} = \frac{ql_1}{EI} \left[ \left( l - \frac{l_1}{2} \right) \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right]. \end{cases} \quad (x < l-l_1) \quad (4)$$

$$BD \text{ 段} \begin{cases} \theta_{BD} = \frac{q}{2EI} \left( l^2x - lx^2 + \frac{x^3}{3} + C \right); \\ v_{BD} = \frac{q}{2EI} \left( \frac{l^2}{2}x^2 - \frac{l}{3}x^3 + \frac{x^4}{12} + Cx + D \right). \end{cases} \quad (x \geq l-l_1). \quad (5)$$

上式中 $EI$ 为弯曲刚度,式(5)中的 $C, D$ 为待定系数,可通过 $D$ 点处的边界条件求得.

该小挠度变形阶段主要是:锚杆 $BD$ 段受到右块体滑移时的作用力,杆体发生挠曲变形,然后杆体开始与孔壁接触,此时杆体上的 $C, D$ 处即与孔壁接触.此时杆体 $C$ 处的挠度可由式(4)得到.由图1可知杆体与孔壁的间隙宽度为 $e_1$ ,此时若 $|v_{AD}(C)| \geq e_1$ ,则说明杆体从开始受力到接触孔壁的过程中在弹性范围内,工程中 $e_1$ 一般很小,所以该阶段的挠曲变形在弹性范围内.

### 2.2.2 弹塑性剪切变形阶段

经过小挠度变形弯曲变形后, $AC$ 段杆体在靠近节理侧的 $FC$ 段杆体与孔壁贴合挤压,因此受到孔壁的反作用力;与此同时 $DB$ 段靠近节理侧 $DE$ 杆体与 $FC$ 段情况相同,但其所受载荷方向相反. $EF$ 段杆体及其载荷分布情况见图4.

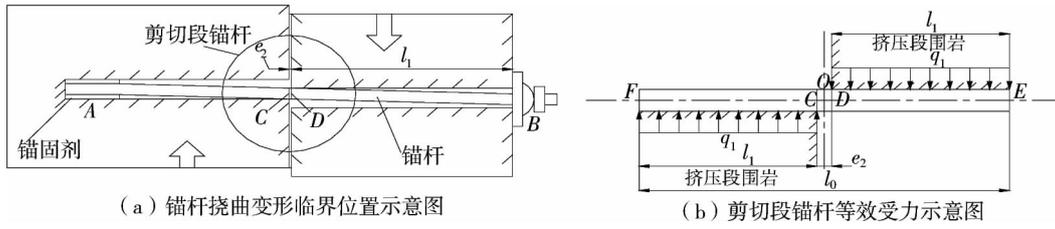


图4 锚杆受剪切载荷段示意图

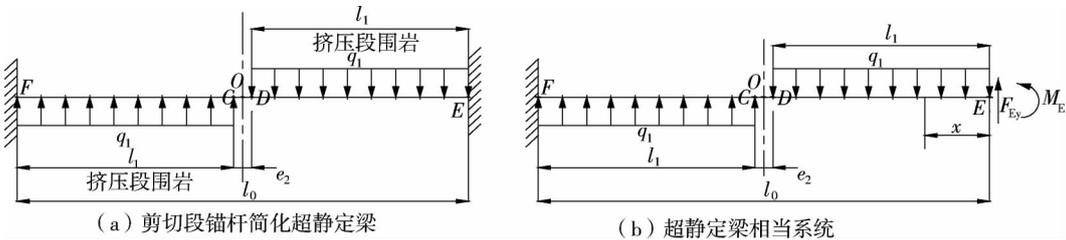


图5 剪切段杆体简化超静定梁示意图

2.2.2.1 剪切段整体杆体的弹性分析

一般节理面两侧岩性相同,根据其受力特点可知,在节理面附近存在一段结构对称、载荷反对称杆体,在此令该段杆体为EF段,其总长为 $l_0$ ,其中点为O点截面.锚杆与孔壁刚贴合孔壁时,杆体仍处于弹性状态,因此孔壁介质对锚杆产生的反力符合Winkler假设<sup>[4]</sup>,故处于弹性变形阶段的孔壁对锚杆的反作用力: $q_1 = kq$ ( $k$ 为反力系数),反力系数 $k$ 的大小取决于岩石自身的物理力学性质.

此阶段EF段杆体可简化为两端固定、杆体上承受反对称载荷的超静定梁.EF段杆体在刚接触孔壁时仍处于线弹性状态,故可利用卡氏定理<sup>[10]</sup>求解该静不定梁的多余约束.EF段杆体的等效超静定梁示意图见图5a.其求解过程如下:

首先,选取相当系统.EF具有3个多余约束,由于之前轴向力已忽略不计,因此只有2个多余约束.其多余约束及相当系统见图5b.

其次,由图5b可得梁上任一截面的弯矩方程及其对多余约束的偏导数为

$$ED \text{ 段 } M(x) = F_{Ey}x + M_E - \frac{1}{2}q_1x^2, \frac{\partial M(x)}{\partial F_{Ey}} = x, \frac{\partial M(x)}{\partial M_E} = 1; \tag{6}$$

$$DC \text{ 段 } M(x) = F_{Ey}x + M_E - q_1l_1\left(x - \frac{l_1}{2}\right), \frac{\partial M(x)}{\partial F_{Ey}} = x, \frac{\partial M(x)}{\partial M_E} = 1; \tag{7}$$

$$CF \text{ 段 } M(x) = F_{Ey}x + M_E - q_1l_1\left(x - \frac{l_1}{2}\right) + \frac{1}{2}q_1(x - l_1 - e_2)^2, \frac{\partial M(x)}{\partial F_{Ey}} = x, \frac{\partial M(x)}{\partial M_E} = 1. \tag{8}$$

然后,设E截面在 $F_{Ey}, M_E$ 方向作用下的位移分别为 $\Delta_1, \Delta_2$ ,由卡氏定理,得

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial F_{Ey}} = \int_0^{l_1} \frac{F_{Ey}x + M_E - \frac{1}{2}q_1x^2}{EI}(x) dx + \int_{l_1}^{l_1+e_2} \frac{F_{Ey}x + M_E - q_1l_1\left(x - \frac{l_1}{2}\right)}{EI}(x) dx + \\ &\int_{l_1+e_2}^{l_0} \frac{F_{Ey}x + M_E - q_1l_1\left(x - \frac{l_1}{2}\right) + \frac{1}{2}q_1(x - l_1 - e_2)^2}{EI}(x) dx = \\ &\frac{1}{EI} \left[ \frac{l_0^3}{3}F_{Ey} + \frac{l_0^2}{2}M_E + \frac{q_1}{24}(3l_0^4 - l_1^4 - l_2^4 - 8l_0^3l_1 + 6l_0^2l_2^2 - 8l_0^3l_2 + 6l_0^2l_2^2) \right]; \\ \Delta_2 &= \frac{\partial V_\varepsilon}{\partial M_E} = \int_0^{l_1} \frac{F_{Ey}x + M_E - \frac{1}{2}q_1x^2}{EI} dx + \int_{l_1}^{l_1+e_2} \frac{F_{Ey}x + M_E - q_1l_1\left(x - \frac{l_1}{2}\right)}{EI} dx + \\ &\int_{l_1+e_2}^{l_0} \frac{F_{Ey}x + M_E - q_1l_1\left(x - \frac{l_1}{2}\right) + \frac{1}{2}q_1(x - l_1 - e_2)^2}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[ \frac{l_0^2}{2}F_{Ey} + M_El_0 + \frac{q_1}{2}(l_0l_1^2 - l_0^2l_1) \right]. \end{aligned}$$

式中  $l_2 = l_1 + e_2$ . 根据位移条件, 当  $EF$  段杆体刚接触孔壁时  $F$  端的位移为 0, 即有  $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$ , 可得多余约束有

$$F_{Ey} = -\frac{q_1}{2l_0^3}\Phi_F(l), M_E = \frac{q_1}{4l_0^2}\Phi_M(l). \tag{9}$$

式中  $\Phi_F(l), \Phi_M(l)$  为  $l$  的多项式, 其中

$$\Phi_F(l) = 3l_0^4 - l_1^4 - l_2^4 - 2l_0^3l_1 + 6l_0^2l_2^2 - 8l_0^3l_2, \Phi_M(l) = 3l_0^4 - l_1^4 - l_2^4 - 2l_0^2l_1^2 + 6l_0^2l_2^2 - 8l_0^3l_2.$$

由式(8)和式(10)可得  $EF$  段杆体的中点  $O$  截面的弯矩为  $M_O = 0$ . 在  $O$  点截面处的弯矩为零可进一步验证  $EF$  段对称杆体上分布的反对称载荷的作用.

### 2.2.2.2 等效剪切段杆体的弹塑性分析

节理面两侧反对称载荷段的杆体具有结构对称、载荷反对称的特点, 故可利用其对称性对其弹塑性阶段挠曲变形进行简化<sup>[11]</sup>. 结合之前的分析, 其杆体的等效受力图及简化后的等效结构见图 6.

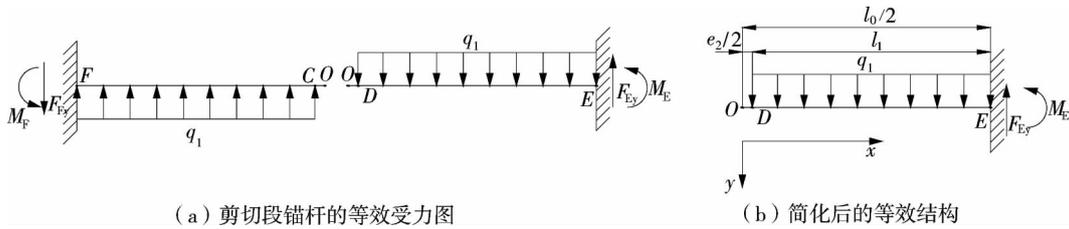


图 6 等效结构示意图

简化后的等效结构为静定悬臂梁. 图 6b 悬臂梁的弯矩方程为

$$OD \text{ 段 } M(x) = 0; \tag{10}$$

$$DE \text{ 段 } M(x) = \frac{q_1}{2}(x - \frac{e_2}{2})^2. \tag{11}$$

根据弯矩方程可知最大弯矩产生在  $E$  点处. 故整个  $OE$  段将在  $E$  点截面处首先出现塑性变形. 由于该梁为圆形截面, 故其弹性极限弯矩及塑性极限弯矩依次为:  $M_s = \frac{\pi r^3}{4}\sigma_s, M_u = \frac{4\pi r^3}{3}\sigma_u$ . 当  $q_1 \leq \frac{2M_s}{l_1^2}$  时, 整个梁均处于弹性状态; 当  $q_1 = \frac{2M_s}{l_1^2}$  时,  $E$  点截面处于弹性极限状态; 当  $\frac{2M_s}{l_1^2} < q_1 < \frac{2M_u}{l_1^2}$  时, 梁上  $E$  点截面

附近  $\sqrt{\frac{2M_s}{q_1}} + \frac{e_2}{2} < x \leq \frac{l_0}{2}$  区间处于弹塑性状态, 该段梁截面靠近中性轴区域为弹性区, 靠近截面边缘区域

为塑性区, 在  $0 \leq x \leq \sqrt{\frac{2M_s}{q_1}} + \frac{e_2}{2}$  区间处于弹性状态; 当  $q_1 \geq \frac{2M_u}{l_1^2}$  时,  $E$  点处达到塑性极限状态,  $E$  点处截面形成塑性铰. 由上述区间关系可以得出: 在杆体材料参数与所受载荷均确定时, 节理宽度  $e_2$  对节理面处杆体的弹性区与弹塑性区的分界面位置存在线性影响, 随着节理宽度的增加, 分界面会向着远离节理的方向移动.

1) 当  $EF$  梁整体处于弹性状态时, 根据其弯矩方程可以得出其挠度:

$$OD \text{ 段 } v_{OD} = 0; \tag{12}$$

$$DE \text{ 段 } v_{DE} = -\frac{q_1}{2EI}(\frac{x^4}{12} - \frac{e_2}{6}x^3 + \frac{e_2^2}{8}x^2). \tag{13}$$

2) 当  $EF$  梁上部分出现弹塑性区域时, 对于理想弹塑性圆截面梁的曲率  $K$  和弯矩  $M$  存在以下关系<sup>[12]</sup>:

$$K = \begin{cases} \frac{M}{EI}, \text{ 弹性段;} \\ \frac{K_s}{\sqrt{3 - \frac{2|M|}{M_s}}} \sin M, \text{ 弹塑性段.} \end{cases} \tag{14}$$

式中  $K_s = M_s/EI$ .

利用虚功原理中的单位载荷法<sup>[10]</sup>可以确定  $EF$  段梁上任意截面处的竖向位移. 设  $H$  点为梁上一点, 其距  $O$  点距离为  $x_1$ , 在  $H$  点截面处施加单位载荷  $F_k = 1$ . 见图7虚拟载荷弯矩图.

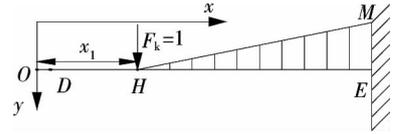


图7 H点虚拟载荷弯矩图

$$\begin{aligned} \text{当 } 0 \leq x \leq \sqrt{\frac{2M_s}{q_1}} + \frac{e_2}{2} \text{ 时, } H \text{ 点的竖向位移为} \\ \Delta_H = \int_0^{l_0/2} \overline{MK} dx = \int_{x_1}^{\sqrt{2M_s/q_1} + e_2/2} \frac{q_1(x - e_2/2)^2(x - x_1)}{2EI} dx + \int_{\sqrt{2M_s/q_1} + e_2/2}^{l_0/2} \frac{K_s(x - x_1)}{\sqrt{3 - q_1(x - e_2/2)^2/M_s}} dx = \\ \frac{q_1}{2EI} \left[ \frac{m^4}{4} - \frac{(x_1 + e_2)m^3}{3} + \frac{(e_2x_1 + e_2^2/4)m^2}{2} - \frac{e_2^2x_1m}{4} + \frac{x_1^4}{12} - \frac{e_2x_1^3}{6} + \frac{e_2^2x_1^2}{8} \right] + \\ K_s \sqrt{\frac{M_s}{q_1}} \left[ \sqrt{\frac{3M_s}{q_1}} - l_1^2 + \left( \frac{e_2}{2} - x_1 \right) \left( \arcsin \sqrt{\frac{q_1 l_1^2}{3M_s}} - \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3} \right) - \sqrt{\frac{M_s}{q_1}} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

式(15)中  $m = \sqrt{2M_s/q_1 + \frac{e_2}{2}}$ .

当  $\sqrt{\frac{2M_s}{q_1}} + \frac{e_2}{2} < x \leq \frac{l_0}{2}$  时,  $H$  点的竖向位移为

$$\begin{aligned} \Delta_H = \int_0^{l_0/2} \overline{MK} dx = \int_{x_1}^{l_0/2} \frac{K_s(x - x_1)}{\sqrt{3 - q_1(x - e_2/2)^2/M_s}} dx = K_s \sqrt{\frac{M_s}{q_1}} \left[ \sqrt{\frac{3M_s}{q_1}} - l_1^2 - \sqrt{\frac{3M_s}{q_1} - \left( x_1 - \frac{e_2}{2} \right)^2} \right] + \\ K_s \sqrt{\frac{M_s}{q_1}} \left( \frac{e_2}{2} - x_1 \right) \left( \arcsin \sqrt{\frac{q_1 l_1^2}{3M_s}} - \arcsin \frac{x_1 - \frac{e_2}{2}}{\sqrt{3M_s/q_1}} \right). \end{aligned} \quad (16)$$

3) 当  $E$  点处截面达到塑性极限状态时, 该截面处将形成塑性铰, 成为机构, 丧失承载能力.  $EF$  段杆体具有对称结构及反对称载荷的特征,  $EF$  段杆体上将在对称位置出现2个转向相反的塑性铰, 如图8所示. 然而, 以上分析为了简化力学模型均以理想弹塑性材料锚杆为基础进行分析, 实际锚杆存在塑性强化阶段, 即在此阶段仍然具有一定的承载能力.

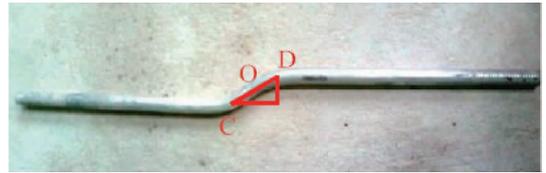


图8 锚杆剪切变形图

### 2.3 算例

基于 MATLAB 平台对锚杆上  $H$  点的竖向位移与节理宽度间的关系、以及  $H$  点的竖向位移与距节理的距离的关系进行了运算. 算例选用 Q235 牌号钢材、直径 20 mm 锚杆, 选取材料性质及载荷等固定参数  $EI = 1.57 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^2$ ,  $q_1 = 300 \text{ N/m}$ ,  $l_1 = 1 \text{ m}$ , 分别以节理宽度  $e_2$ , 距节理的距离  $x_1$  为变量. 得出参数间关系见图9和图10.

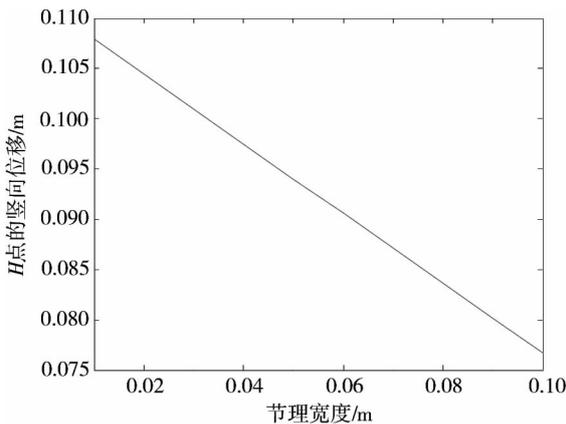


图9 锚杆应力-应变曲线

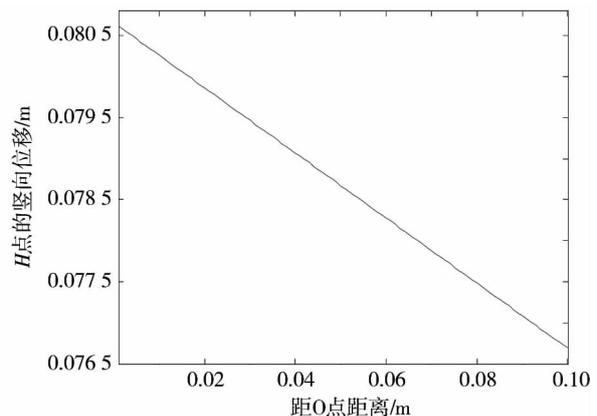


图10 竖向位移与距节理距离的关系

由图9可知,在 $H$ 点位置确定的情况下, $H$ 点的竖向位移随着节理宽度的增加而减小.由图10可知,在节理宽度确定的情况下, $H$ 点距离节理的距离越远,竖向位移越小.

### 3 结论

1)节理与端锚锚杆轴线垂直时,锚杆的剪切变形过程有:小挠度变形阶段、弹塑性剪切变形阶段、塑性铰阶段.

2)端锚锚杆在节理面附近存在结构对称、载荷反对称段部分,且节理宽度对节理面处杆体弹性、弹塑性区域分界面位置有影响:随着节理宽度的增加,弹性区与弹塑性区的分界面会向着远离节理面的方向移动.

3)对于理想弹塑性锚杆,提出了在垂直节理面附近锚杆竖向位移与载荷、节理宽度、材料性质间的弹塑性力学解.

#### 参考文献:

- [1] 张伟,刘泉声.基于剪切试验的预应力锚杆变形性能分析[J].岩土力学,2014,35(8):2231-2240.
- [2] 王金华.我国煤巷锚杆支护技术的新发展[J].煤炭学报,2007,32(2):113-118.
- [3] 何满潮,郭志彪.恒阻大变形锚杆力学特性及其工程应用[J].岩石力学与工程学报,2014,33(7):1297-1308.
- [4] 葛修润,刘建武.加锚节理面抗剪性能研究[J].岩土工程学报,1988,10(1):8-19.
- [5] 张伟,刘泉声.节理岩体锚杆的综合变形分析[J].岩土力学,2012,33(4):1067-1074.
- [6] 王刚,袁康,蒋宇静,等.剪切荷载下岩体结构面-浆体-锚杆相互作用机理宏观研究[J].中南大学学报(自然科学版),2015,46(6):2207-2215.
- [7] Yoshinaka R, Skaguchi S, Shimizu T. Experimental study on the rock bolt reinforcement in discontinuous rock [C]// Proceedings of 6th ISRM Congress. Montreal: ISRM, 1987:1329-1332.
- [8] Spang K, Egger P. Action of fully-grouted bolt in jointed rock and factors of influence [J]. Rock Mechanics and Rock Engineering, 1990,23(3):201-229.
- [9] Ferrero A M. The shear strength of reinforced rock joints [J]. International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences & Geomechanics Abstracts, 1995,32(6):590-600.
- [10] 刘庆潭.材料力学[M].北京:机械工业出版社,2003.
- [11] 李会知,杨建中,李昊.集中荷载作用下两端固支梁的弹塑性力学解[J].郑州大学学报(理学版),2007,39(1):107-109.
- [12] 夏志皋.塑性力学[M].上海:同济大学出版社,2003.